Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **WS 10/11**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Henning Hasemann

Algorithmische Geometrie
Übung 2 vom 29. 11. 2010

Abgabe der Lösungen am Dienstag, den 14. 12. 10, vor der Übung im SN19.4.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen versehen!

Aufgabe 1 (Triangulierungen): Beweise oder widerlege: Der Dualgraph einer Triangulierungen eines (y-)monotonen Polygons ist immer ein Pfad, d.h., jeder Knoten des Dualgraphen hat höchstens zwei Nachbarn.

(20 P.)

Aufgabe 2 (Monotonie):

a) Gegeben ein einfaches Polygon P und eine Gerade g.

Gib einen Algorithmus an, der in $O(n)$ Schritten überprüft, ob P entlang g monoton ist.

P kann wahlweise z. B. als Doubly-Connected Edge List (DCEL) oder einfach als Liste von Knoten oder Kanten gegeben sein.

(Hinweis: Du darfst annehmen, dass keine Kante des Polygons genau senkrecht zu g verläuft)

b) Gegeben ein einfaches Polygon P. Gib einen Algorithmus an, der in $O(n)$ Schritten entscheidet, ob es eine Gerade g gibt, so dass P entlang g monoton ist.

(Hinweis: Betrachte z. B. die Innenwinkel an möglichen Sattelpunkten)

Es ist natürlich auch möglich/erlaubt, einen Algorithmus anzugeben, der beide Probleme auf einmal löst. Dies muss aber nicht für jeden Ansatz sinnvoll sein.

(30 P.)

Aufgabe 3 (Monotonie): Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Polygon mit mindestens n Ecken, das entlang jeder Geraden monoton ist.

b) Es gibt ein Polygon mit 10 oder weniger Ecken, das entlang keiner Geraden monoton ist.

(30 P.)

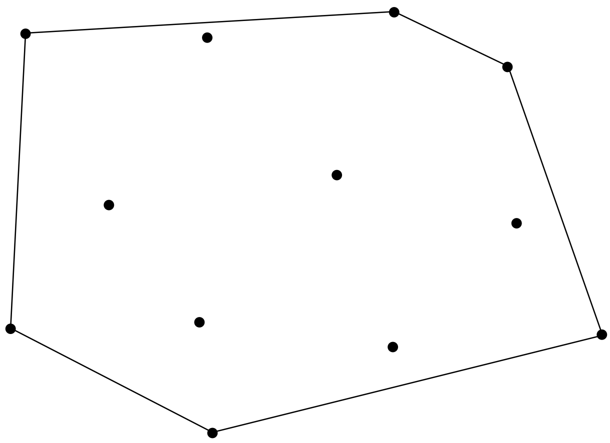

Abbildung 1: Konvexe Hülle einer Punktmenge P

Aufgabe 4 (Voronoi-Diagramme): Die konvexe Hülle $Conv(P)$ einer Punktmenge P ist das konvexe Polygon, dessen Eckpunkte nur aus P stammen und welches alle Punkte aus P enthält.

Gegeben: $Vor(P)$, das Voronoi-Diagramm der Punktmenge P, als DCEL.
Zusätzlich nehme an, dass jede Fläche (Voronoi-Zelle) einen Verweis auf den Punkt (Site) aus P enthält, zu dem sie gehört.

Sei weiterhin v_0 ein Punkt in dem sich 3 oder mehr Voronoi-Kanten treffen (Knoten von $Vor(P)$), von denen eine solch eine Halbgerade ist.

Bearbeite **eine** der folgenden Aufgaben:

a) Gib einen Algorithmus an, der in $O(n)$ Schritten die konvexe Hülle von P (z. B. als Menge von Kanten) erzeugt. Nimm dazu an, dass Halbgeraden als Kanten in der DCEL erlaubt und als solche erkennbar sind.

b) Nimm an, das Voronoi-Diagramm ist zusätzlich von einem Rechteck umrandet. Rechteck-Kanten können dadurch identifiziert werden, dass sie an der unbeschränkten Aussenfläche liegen. Gib einen Algorithmus an, der in $O(n)$ Schritten die konvexe Hülle von P (z. B. als Menge von Kanten) erzeugt, wobei k die Anzahl der Ecken der konvexen Hülle ist.

(Hinweis: Überlege, welche Art von Voronoi-Kanten für die konvexe Hülle relevant sind und wo diese sich befinden müssen.)

(30 P.)

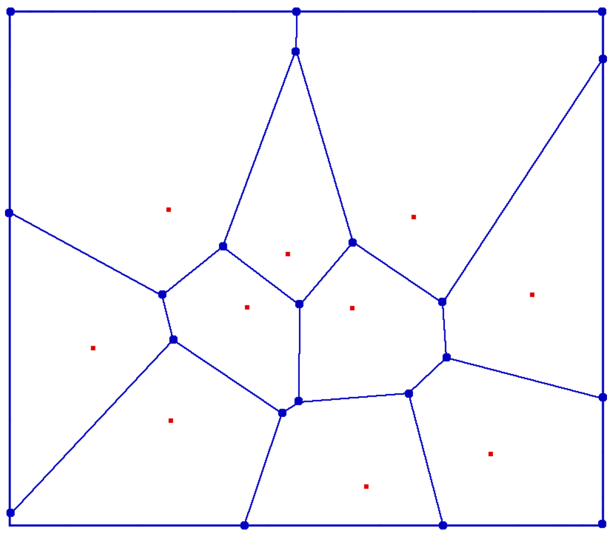

Abbildung 2: Ein mit einem Rechteck umrandetes Voronoi-Diagramm