Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen 2 – Übung #6

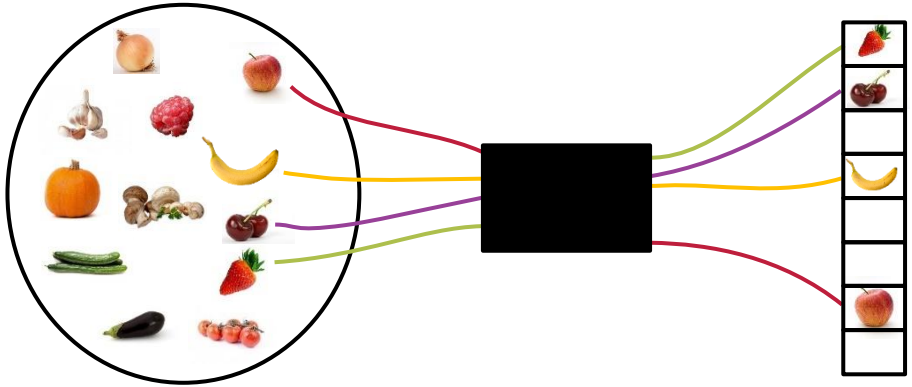
Hashing, Wiederholung

Matthias Konitzny

07.07.2021

Heute

- Hashing
- Modulo
- Fragen/Wiederholung
  - Dynamische Programmierung
  - Approximation
  - Reduktionen



Hashing

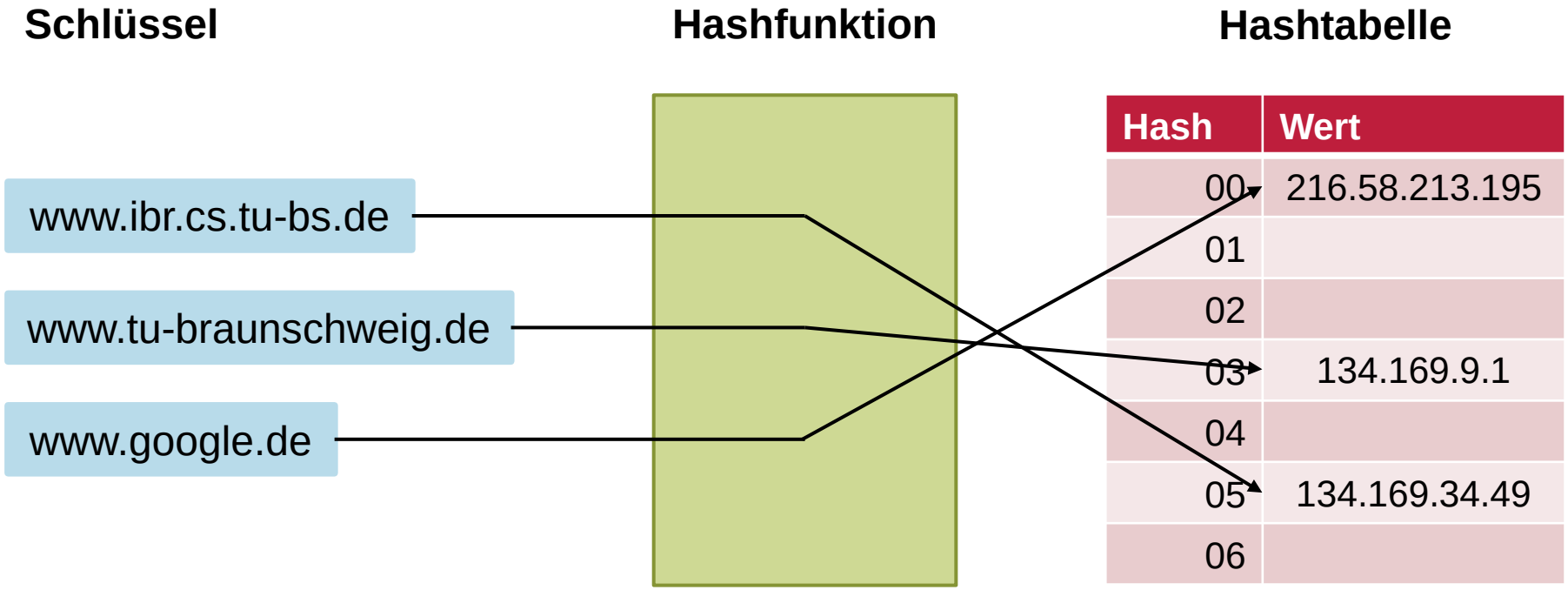
Motivation

Assoziative Datenstruktur mit extrem schnellen Operationen für Suchen, Einfügen und Löschen.

Beispiel

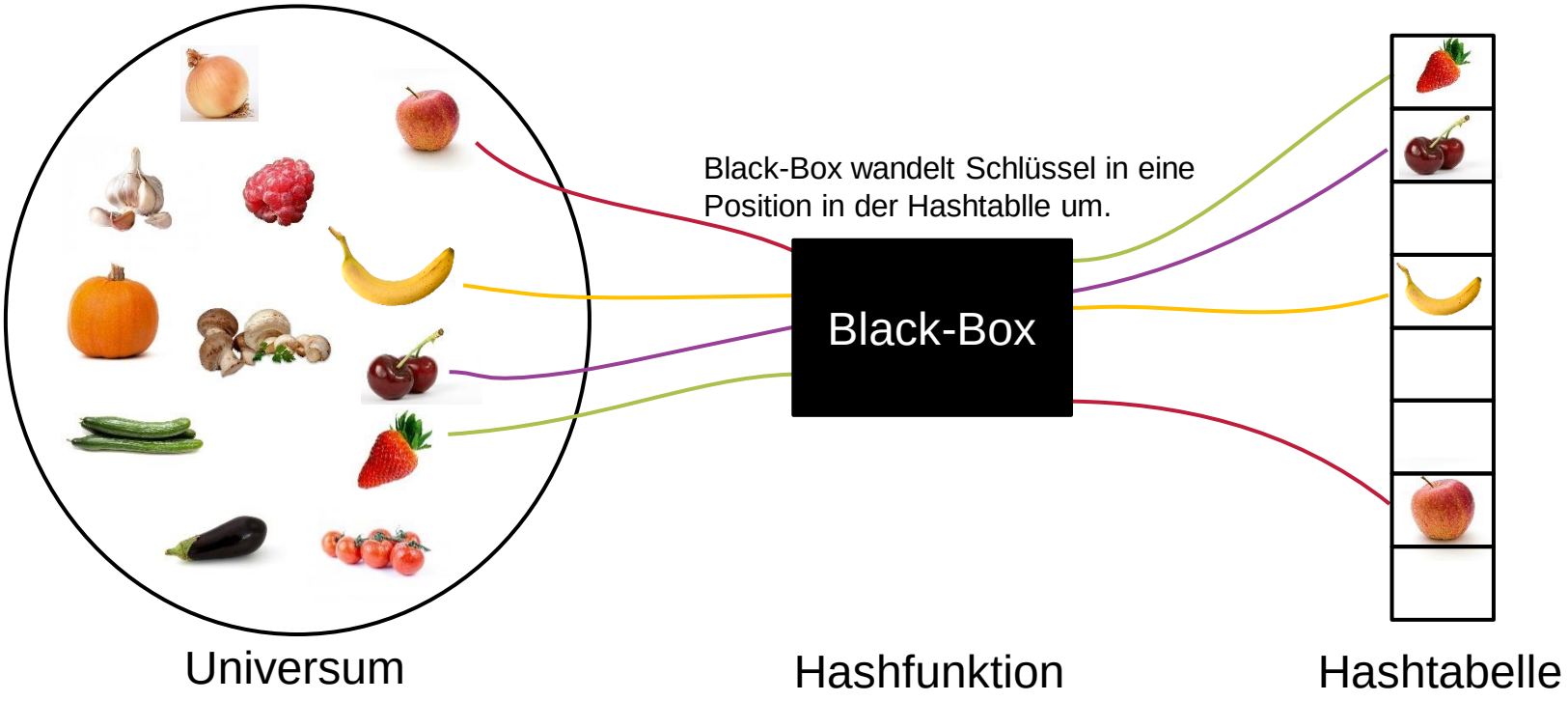
Domainnamen	IP-Adressen
www.ibr.cs.tu-bs.de	216.58.213.195
www.tu-braunschweig.de	134.169.9.1
www.google.de	134.169.34.49

Motivation


Schlüssel
Hashfunktion
Hashtabelle
www.ibr.cs.tu-bs.de
www.tu-braunschweig.de
www.google.de
Hash
Wert
00
216.58.213.195
01
02
03
134.169.9.1
04
05
134.169.34.49
06

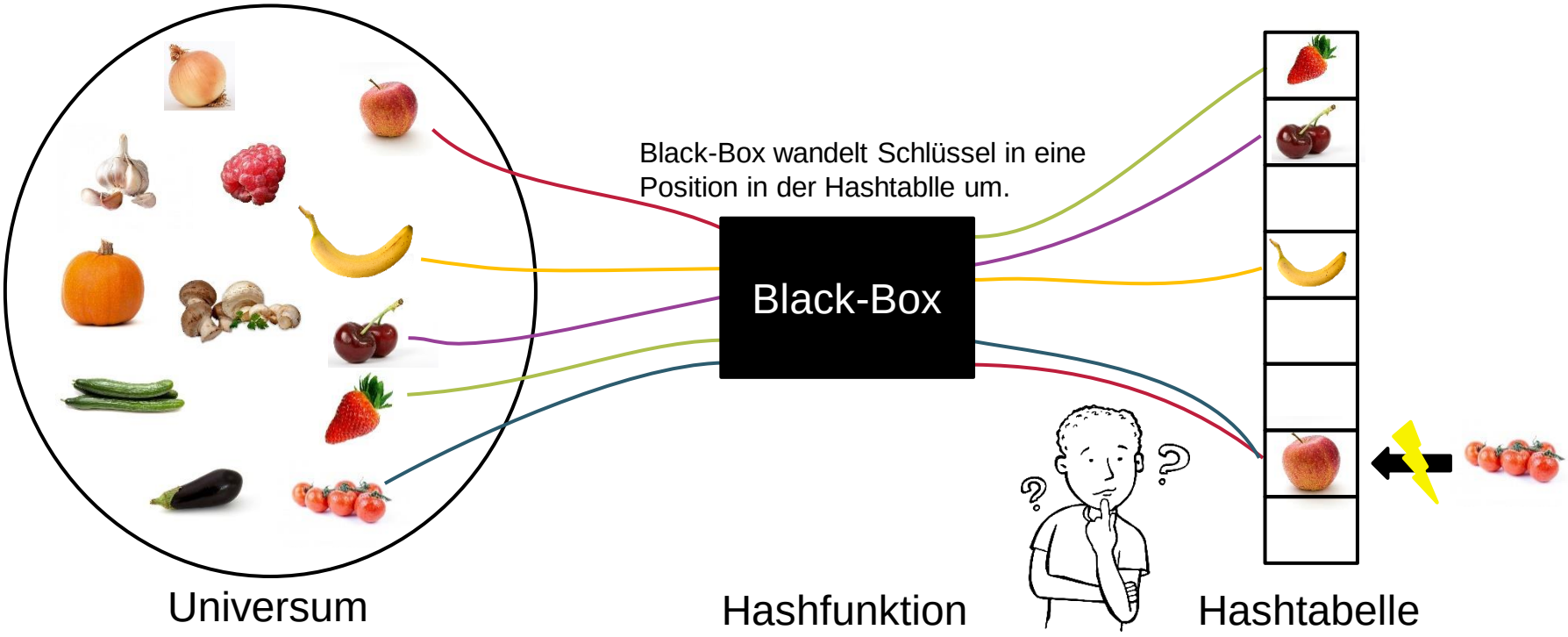
Hashing

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



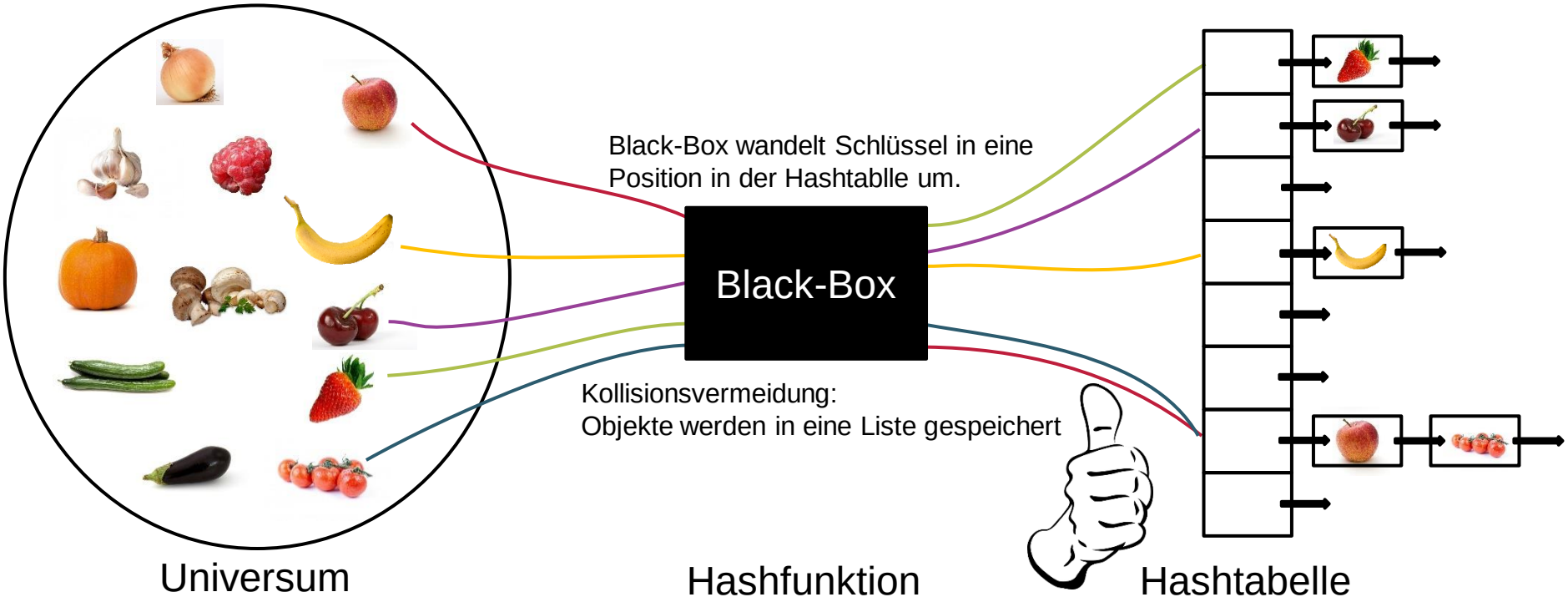
Hashing - Kollision

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



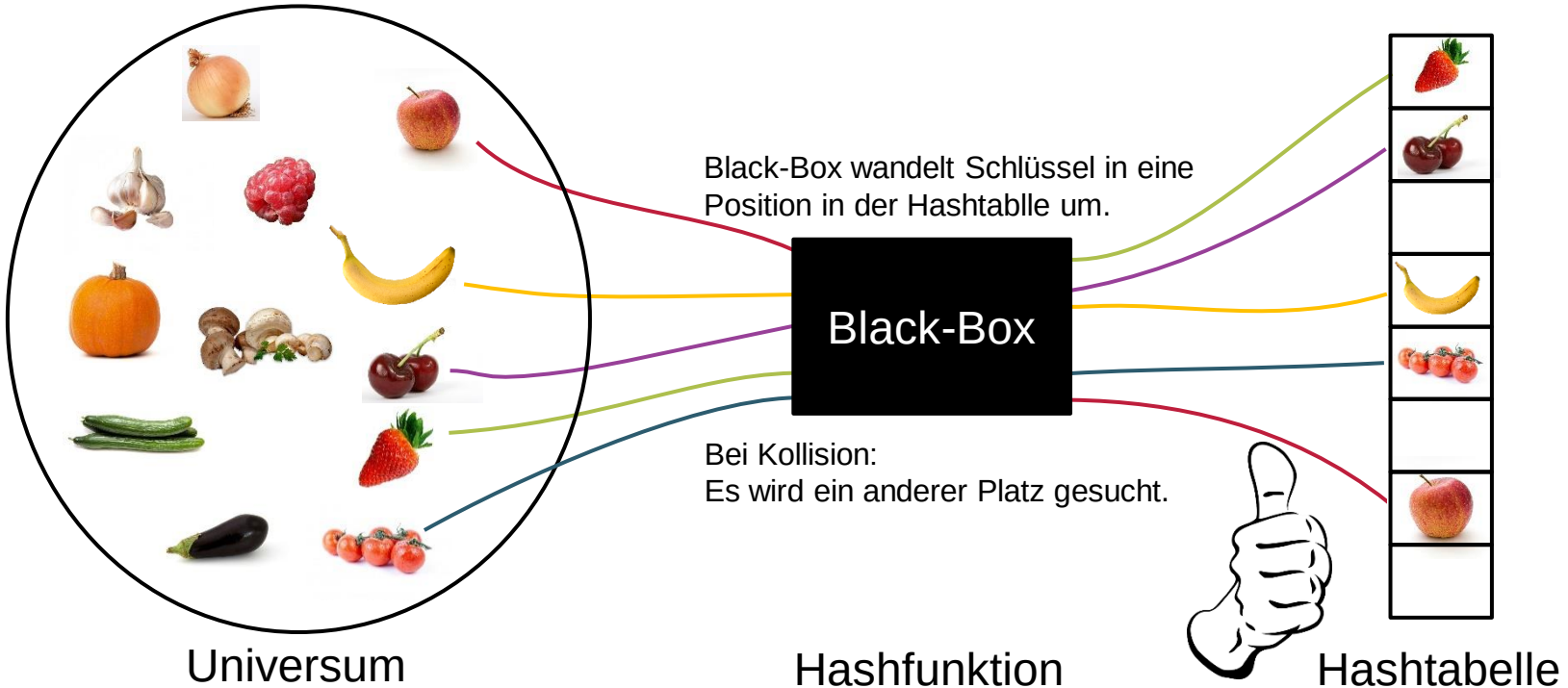
Hashing - Listen

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



Hashing – Offenes Sondieren

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



Hashfunktion – Offenes Hashing

Es sind

$$m \in \mathbb{N},$$
$$h_1 : \mathbb{N} \to \{0, \dots, m-1\},$$
$$h_2 : \mathbb{N} \to \{1, \dots, m-1\}$$

und

$$f : \mathbb{N} \to \{0, \dots, m-1\}$$

Offenes Hashing benutzt eine Hashfunktion der Form

$$t(i, x) := \big(h_1(x) + f(i) \cdot h_2(x)\big) \bmod m$$

Beispiel für $f(i) := (a \cdot i + b) \bmod m$ in rekursiver Schreibweise:

$$t(i, x) := \begin{cases} \big(h_1(x) + b h_2(x)\big) \bmod m & , \text{falls } i = 0 \\ \big(t(i-1, x) + a \cdot h_2(x)\big) \bmod m & , \text{falls } i > 0 \end{cases}$$

Hashfunktionen – Offenes Hashing

$$t(i,x) \coloneqq \big(h_1(x) + f(i) \cdot h_2(x)\big) \bmod m$$

$t(i,x)$ nutzt

- **Lineares Sondieren**, falls $f(i) \in \Theta(i)$ und $h_2(x) \in \Theta(1)$
- **Quadratisches Sondieren**, falls $f(i) \in \Theta(i^2)$ und $h_2(x) \in \Theta(1)$
- **Doppeltes Hashing**, andernfalls

Modulo – Restdivision

Für $m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$ ist

$$x \bmod m = r,$$

falls eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass gilt

$$x = q \cdot m + r$$

Damit ist auch für beliebiges $i \in \mathbb{Z}$

$$(x + i \cdot m) \bmod m = x \bmod m$$

Beispiel:

$$27 \bmod 7 = 6$$
$$31 \bmod 9 = 4$$

Man kann zeigen:

$$(a + b) \bmod m = \big((a \bmod m) + (b \bmod m)\big) \bmod m$$
$$(a \cdot b) \bmod m = \big((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)\big) \bmod m$$

Beispiel

$$t(i,x) = (4x^2 - 4 + (4x+1)i) \bmod 13$$

Füge nacheinander die Zahlen 5, 7, 2, 6, 11 ein. $m = 13$

$$t(0,5) = 100 - 4 + 0 \bmod 13 = 96 \bmod 13 = 5$$

$$t(0,7) = 4 \cdot 49 - 4 + 0 \bmod 13 = 4 \cdot 10 - 4 \bmod 13 = 10$$

$$t(0,2) = 16 - 4 + 0 \bmod 13 = 12$$

$$t(0,6) = 4 \cdot 36 - 4 + 0 \bmod 13 = 10$$

$$t(1,6) = 4 \cdot 36 - 4 + 24 + 1 \bmod 13 = 1 - 4 + 11 + 1 \bmod 13 = 9$$

$$t(0,11) = 4 \cdot 4 - 4 \bmod 13 = 12$$

$$t(1,11) = 4 \cdot 4 - 4 + 44 + 1 \bmod 13 = 12 + 6 \bmod 13 = 5$$

$$t(2,11) = 4 \cdot 4 - 4 + (44+1) \cdot 2 \bmod 13 = 12 + 12 \bmod 13 = 11$$

i	T
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Hashing in der Praxis

Auswahl der verwendeten Hashfunktion hängt stark vom Einsatzgebiet ab.

Programmiersprachen

`HashMap` `dict()`

Sicherheit

Prüfsummen

MD5

SHA

PGP

Spezialisierte Systeme

Distributed Hash Tables

Chord

Semesterrückblick

Zusammenfassung
Algorithmen und Datenstrukturen 2

Knapsackvarianten

Problem	0-1-Knapsack		Maximum Knapsack			
Typ	Entscheidungsproblem		Optimierungsproblem			
Komplexität	NP-vollständig		NP-schwer			
Algorithmen	DP	B&B	Greedy_0	Greedy_k $(k > 0)$	DP	B&B
Bemerkung	-	-	Wert ist bel. schlecht	$1 - \frac{1}{k+1}$ -Approximation	Optimal	Optimal
Laufzeit	$O(nZ)$	$O(n2^n)$	$O(n \log n)$	$O(n^{k+1})$	$O(nZ)$	$O(n2^n)$

Weitere Probleme:

- Subset Sum: NP-vollständig, Dynamisches Programm
- Partition: NP-vollständig, Dynamisches Programm
- Bin Packing: NP-vollständig, lässt sich nicht besser als $\frac{3}{2}$ approximieren.

Hörsaal-Belegung

Problem	HÖRSAAL-BELEGUNG		
Typ	Optimierungsproblem		
Komplexität	P		
Algorithmen	Greedy Endpunkt	Greedy Kleinstes	Greedy Überlappung
Bemerkung	Optimal	$\frac{1}{2}$ - Approximation	$\frac{1}{2}$ - Approximation
Laufzeit	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$

Weitere Probleme:

- HÖRSAAL-AUSLASTUNG: P, Dynamisches Programm
- Färbung von Intervallgraphen

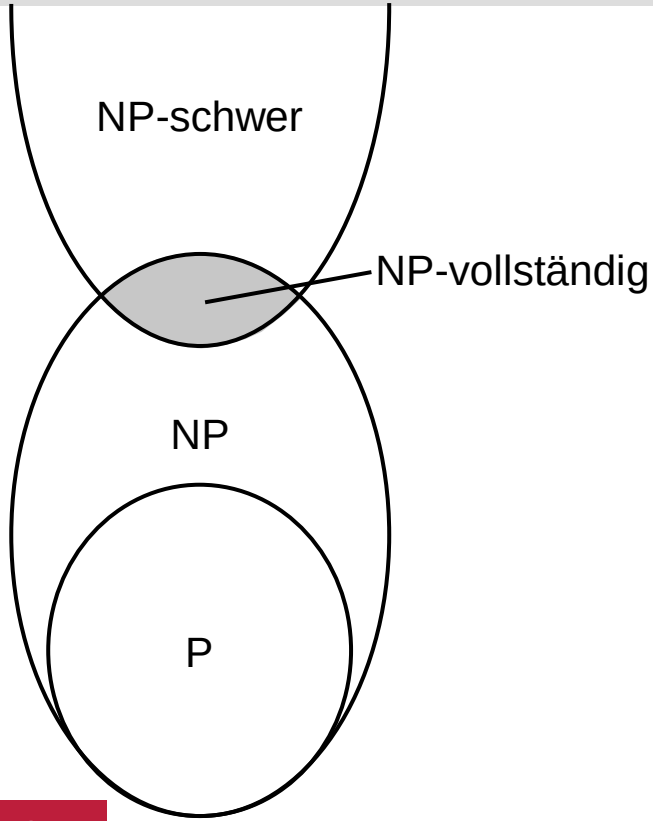
Graphenprobleme

Problem	Traveling Salesman			Minimum Vertex Cover
Typ	Optimierungsproblem			Optimierungsproblem
Komplexität	NP-schwer			NP-schwer
Algorithmen	Brute Force	B&B	DP	MaxMatching
Bemerkung	Optimal	Optimal	Optimal	2-Approximation
Laufzeit	$O(n!)$	$O(f(n)2^{n^2})$	$O(n^2 2^n)$	$O(n^2)$

Weitere Probleme:

- Unabhängige Menge: NP-vollständig
- Euklidisches Traveling Salesman: NP-schwer, lässt sich gut approximieren (siehe NWA)

Komplexitätsklassen



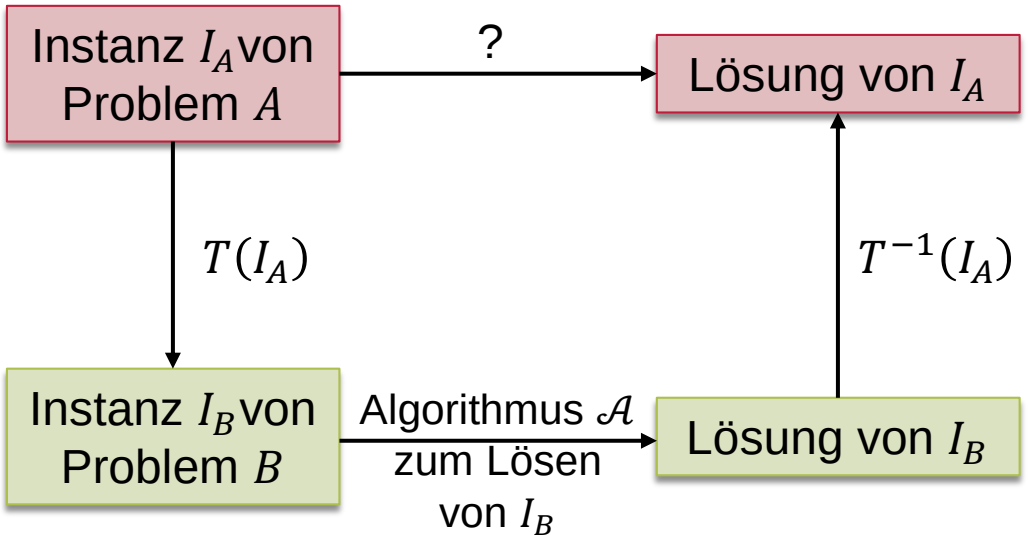
Ein Problem Π liegt in
- **P**, falls es einen Polynomialzeitalgorithmus gibt, der Π korrekt löst.
- **NP**, falls jede Lösung in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Ein Problem Π heißt
- **NP-schwer**, falls jedes Problem aus NP auf Π *reduziert* werden kann.
- **NP-vollständig**, falls Π NP-schwer ist und in NP liegt.

Reduktionen

$T(I_A)$ und $T^{-1}(I_A)$ besitzen polynomielle Laufzeit.

Daher: Besitzt $\mathcal{A}$ polynomielle Laufzeit, dann können wir die Lösung von I_A in polynomieller Zeit bestimmen.



Was tun bei NP-Vollständigkeit?

	Heuristik	Approximation	Exakt
Vorteil	Sehr schnelle und oft sehr gute Lösungen.	Gibt Garantien für den Wert der Lösung.	Geben den optimalen Wert aus.
Nachteil	Kann beliebig schlecht sein	Oft nicht optimal, da der Worst-Case abgefangen werden muss.	Sie sind sehr langsam.
Beispiel	$Greedy_0$	$Greedy_k$	B&B, DP

Wiederholung I
Dynamische Programmierung

Würfelsumme

Gegeben: n Würfel mit je m Seiten (und Werten $1, \ldots, m$) und eine Zahl K.

Gesucht: Anzahl Möglichkeiten den Wert K mit den Würfeln zu erzeugen.

Ein 6-seitiger Würfel:

K	0	1	2	3	4	5	6	7
#	0	1	1	1	1	1	1	0

Würfelsumme

Zwei 6-seitige Würfel

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
#	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	0

Summe!

Drei 6-seitige Würfel

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
#	0	0	0	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	0

Würfelsumme

Sei $\mathcal{A}(i,j)$ die Anzahl der Möglichkeiten den Wert i mit j m-seitigen Würfeln zu erzeugen.
Dann ist

$$\mathcal{A}(i,j) \coloneqq \begin{cases} 0 & ,\text{falls } j = 0, i > 0 \\ 1 & ,\text{falls } j = i = 0 \\ 0 & ,\text{falls } i < j \\ 0 & ,\text{falls } i > mj \\ \sum_{\ell=1}^{\min(i,m)} \mathcal{A}(i-\ell, j-1) & ,\text{sonst} \end{cases}$$

K	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{A}(K,3)$	21	25	27	27	25	21

Welchen Wert besitzt $\mathcal{A}(14,4)$? Antwort: $21 + 25 + 27 + 27 + 25 + 21 = 146$

Würfelsumme

Function $A(K, n)$
    $A[0..nm][0..n]$ //2D Array
    $A[0][0] \coloneqq 1$
    for $i = 1$ **to** K **do**
        $A[i][0] \coloneqq 0$

    for $j = 1$ **to** n **do**
        for $i = 0$ **to** $j - 1$ **do**
            $A[i][j] \coloneqq 0$
        for $i = j$ **to** jm **do**
            $k \coloneqq \min(i, m)$
            $A[i][j] \coloneqq \sum_{\ell=1}^{k} A[i - \ell][j - 1]$
        for $i = jm + 1$ **to** nm **do**
            $A[i][j] \coloneqq 0$
    return $A[K][n]$

$$\mathcal{A}(i,j) \coloneqq \begin{cases} 0 & , \text{falls } j = 0, i > 0 \\ 1 & , \text{falls } j = i = 0 \\ 0 & , \text{falls } i < j \\ 0 & , \text{falls } i > mj \\ \sum_{\ell=1}^{\min(i,m)} \mathcal{A}(i-\ell, j-1) & , \text{sonst} \end{cases}$$

Wiederholung II
Approximation

Approximation – Probleme mit Parameter

Manchmal besitzt man Informationen über die Instanzen.

Beispiele:

MAXIMUM KNAPSACK mit $\alpha \in \mathbb{N}$
Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $z_i \leq \frac{z}{\alpha}$
➔ GREEDY_0 ist eine $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ - Approx.

BIN PACKING mit $\alpha \in \mathbb{N}$
Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $z_i \leq \frac{z}{\alpha}$
➔ FIRST FIT ist eine $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ - Approx.

SET COVER mit $k \in \mathbb{N}$
Jedes Element $u \in U$ kommt in maximal k Teilmengen in $\mathcal{F}$ vor.
➔ Es gibt eine k - Approx.

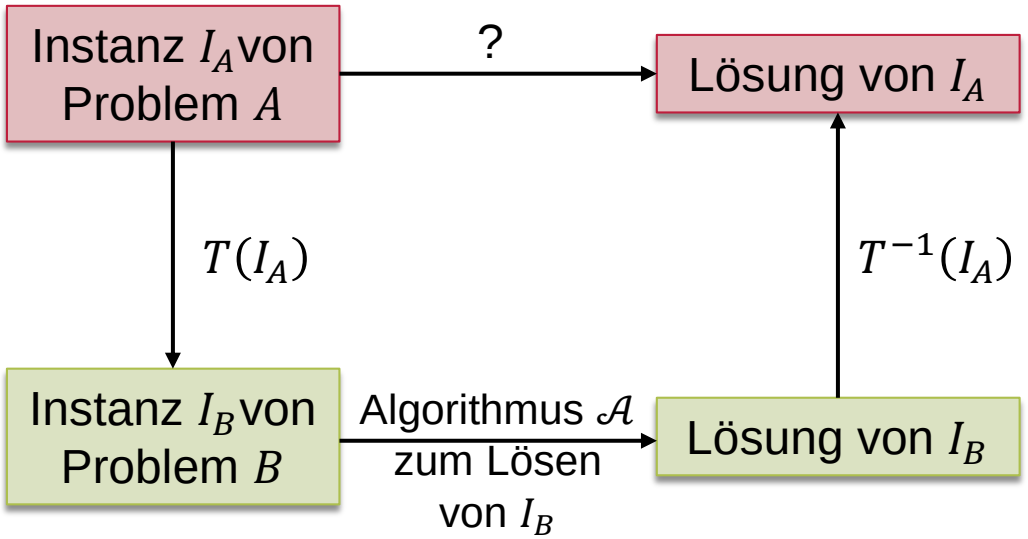
Für $k = 2$ ist das VERTEX COVER.

Wiederholung III
Reduktion

Reduktionen

$T(I_A)$ und $T^{-1}(I_A)$ besitzen polynomielle Laufzeit.

Daher: Besitzt $\mathcal{A}$ polynomielle Laufzeit, dann können wir die Lösung von I_A in polynomieller Zeit bestimmen.



3SAT-3

Gegeben: Formel wie bei 3SAT, aber jede Variable kommt in maximal drei Klauseln vor.
Frage: Lässt sich die Formel erfüllen?

Dieses Problem ist NP-schwer!

Wir zeigen: 3SAT $\leq_p$ 3SAT-3

Problematisch nur Variablen, die öfter als drei Mal vorkommen.

Wie können wir das auflösen?

3SAT-3

$$(x_i \vee x_j \vee x_k) \qquad (\bar{x}_i \vee \bar{x}_o \vee x_q) \qquad (x_i \vee \bar{x}_p \vee x_j) \qquad (x_i \vee x_p \vee \bar{x}_o)$$

Für jedes der n_i Literale von Variable x_i:

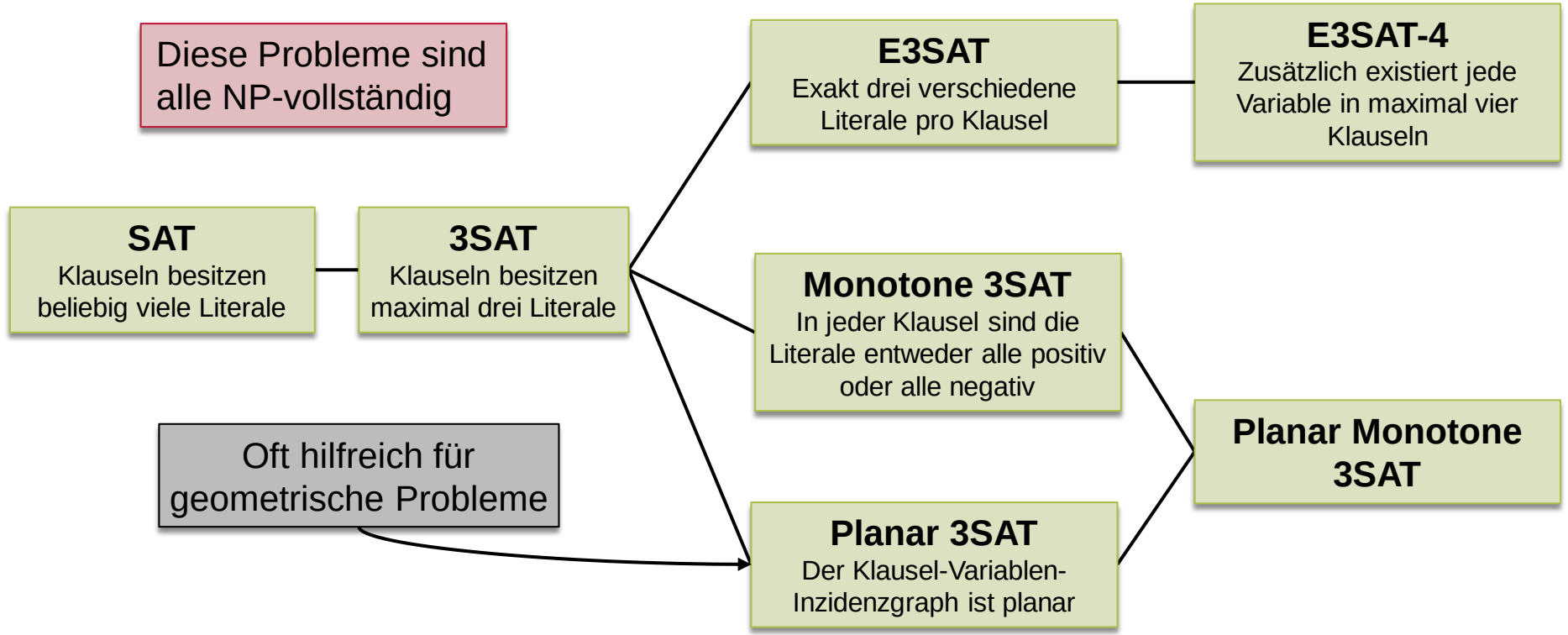
- Erzeuge Variablen $x_{1,i}, \dots, x_{n_i,i}$.
- Ersetze das c-te Literal von x_i mit einem Literal der Variablen $x_{c,i}$.
- Füge Klauseln der folgenden Form hinzu.

$$(x_{1,i} \vee \bar{x}_{2,i}) \wedge (x_{2,i} \vee \bar{x}_{3,i}) \wedge \cdots \wedge (x_{n_i,i} \vee \bar{x}_{1,i})$$

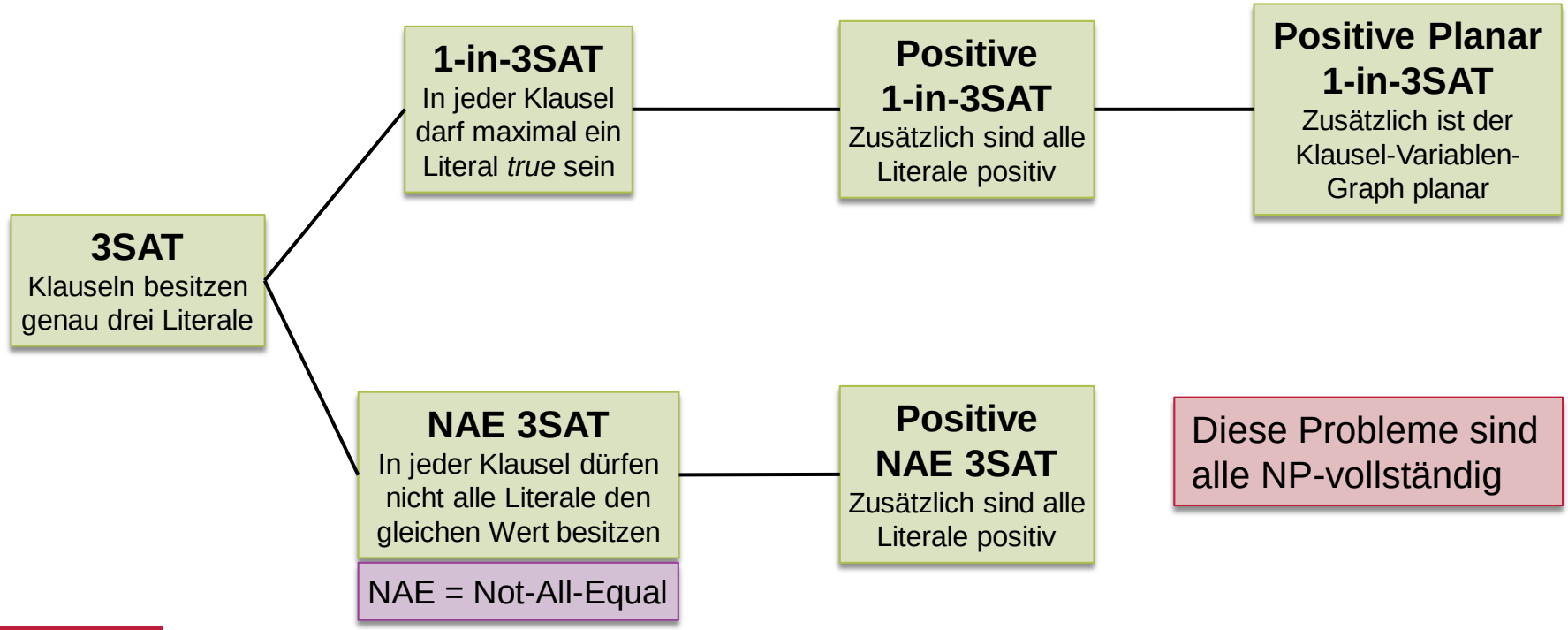
Beobachtungen:

- Die neuen Variablen tauchen genau drei Mal auf.
- Ist eine Variable auf *true* gesetzt, sind alle *true*. (Repräsentieren die gleiche Variable!)
- Die alte Variable taucht nicht mehr auf.

Weitere 3SAT-Varianten

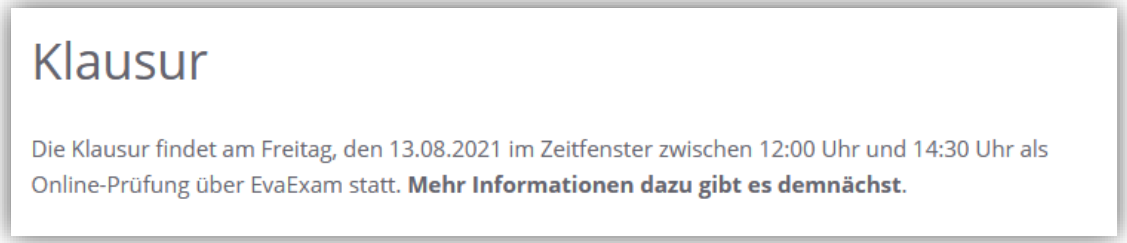


Noch mehr 3SAT Varianten



Klausur

Klausurinfos



Was man wissen sollte:

- Alles aus der Vorlesung (Ohne höherdimensionales Packen)
- Übersicht über die Übungen/Hausaufgaben