Übung #3

Branch-and-Bound

Allgemeiner Ablauf:

1. Zulässigkeit testen
2. Test auf bessere Lösung
3. Schranken betrachten
4. Verzweigen (falls nötig)

Eine Herausforderung:
Gute Schranken finden, d.h.
die Differenz aus oberer und unterer Schranke
so klein wie möglich halten!

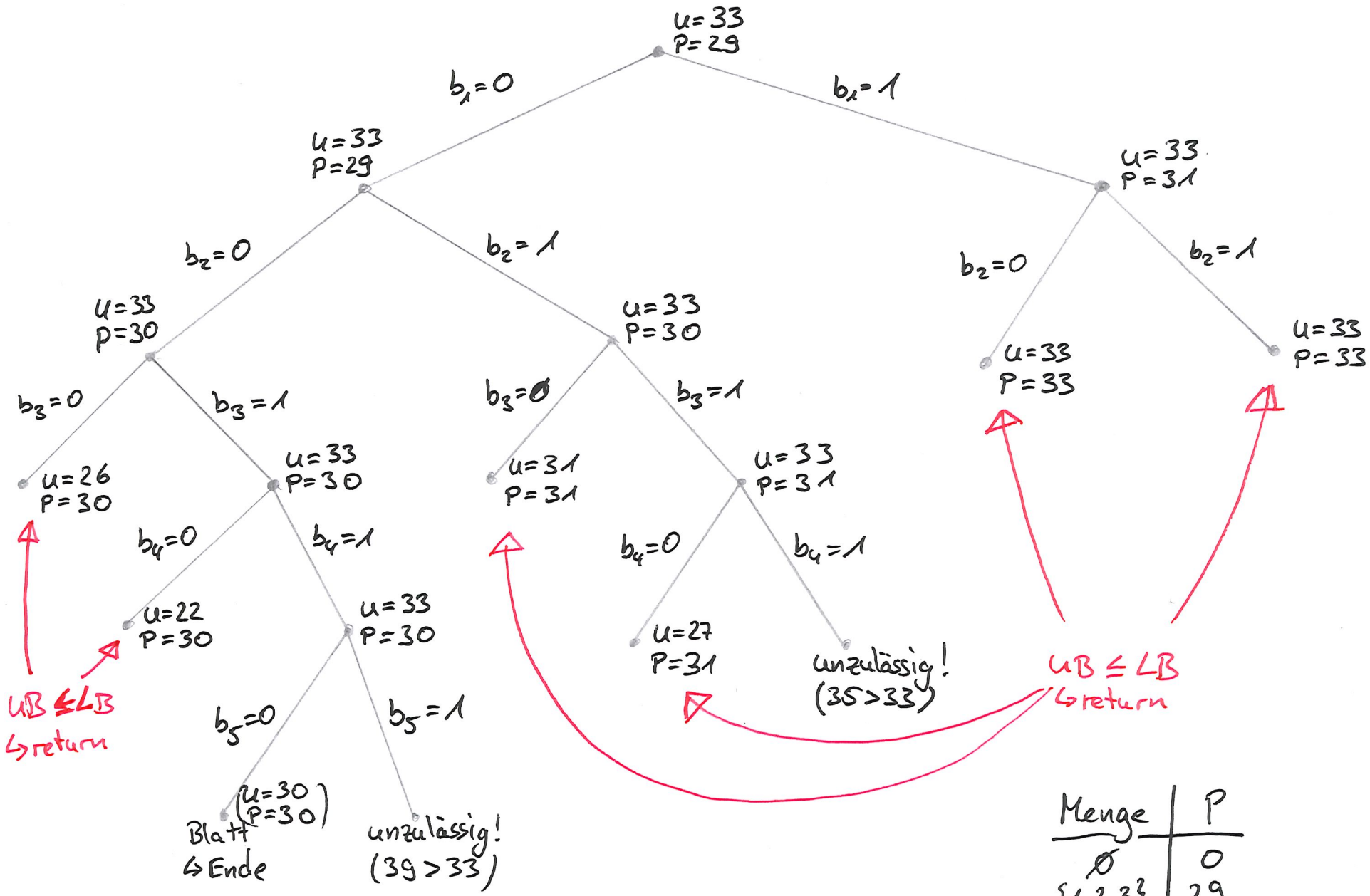
Bei Knapsack:

- Obere Schranke: Relaxierung → Fractional Knapsack
  → Greedy
- Untere Schranke: $Greedy_0$ (siehe Blatt 1)

Ein Beispiel:

i	1	2	3	4	5
$z_i = p_i$	11	5	13	17	9

$Z = 33$



Menge	P
$\emptyset$	0
$\{1,2,3\}$	29
$\{3,4\}$	30
$\{2,4,5\}$	31
$\{1,3,5\}$	33

Ein neues Problem:

Euklidisches Traveling Salesman Problem (ETSP)

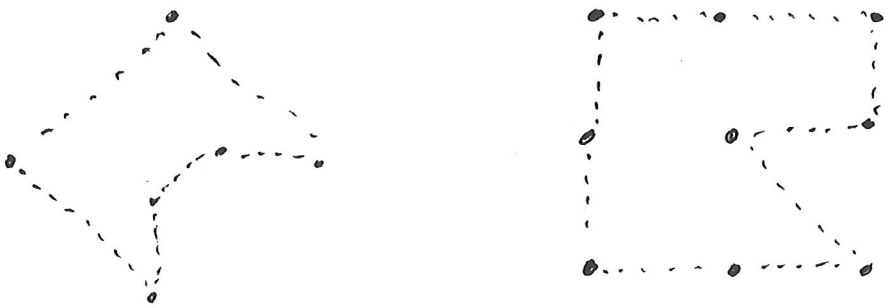
Gegeben: n Punkte $p_1, \dots, p_n$ in der Ebene, also $p_i \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Eine $\boxed{\text{kürzeste}}$ Rundreise, die alle Punkte einmal abläuft.

(Formal: Finde Permutation π, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} \| p_{\pi(i)} - p_{\pi(i+1)} \| \text{ minimal mit } p_{\pi(n+1)} = p_{\pi(1)} \;)$$

Beispiele:



Was sind mögliche Schranken?

obere Schranke

- 2x Gewichts-minimaler Spannbaum
- jede gültige Lösung
  - Greedy?

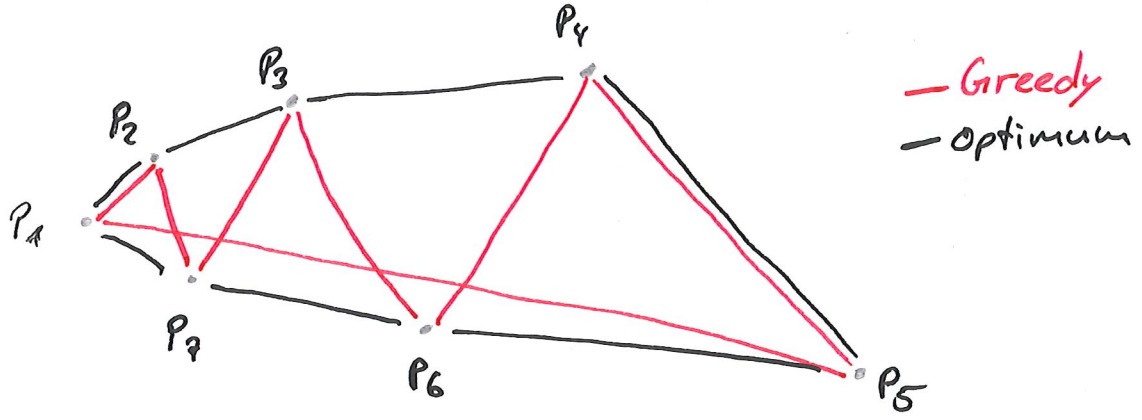
untere Schranke

- Gewichts-minimaler Spannbaum
- Summe der n kürzesten Kanten
- ...

Wie sieht ein möglicher Greedy-Algorithmus aus?

↳ Starte bei P_1 und gehe immer zum nächstgelegenen Punkt.

Beispiel:



Schranken haben wir also (auch, wenn sie ggf nicht gut sind).

Wie sieht es mit
- Zulässigkeit und
- Verzweigung aus?

Nehmen wir letzteres:

Worüber können wir verzweigen?

Die Kanten! Denn sie sind entweder da (1) oder nicht (0).

Betrachte irgendeine Reihenfolge der Kanten.

Dann ist

$b_i \in \{0,1\}$ für die i-te Kante

Nun: Wann ist eine (Teil-)Lösung zulässig?

Welche Eigenschaften gibt es?

1.) Es dürfen maximal n Kanten ausgewählt sein:

$$\sum_i b_i \leq n$$

2.) An jedem Knoten dürfen maximal 2 Kanten anliegen:

$$\sum_{i \in \delta(p)} b_i \leq 2$$

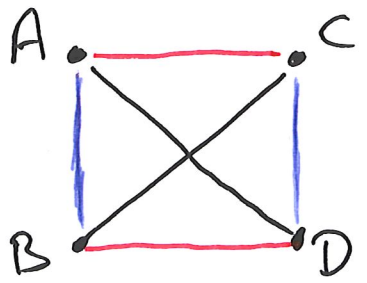
3.) Falls $< n$ Kanten ausgewählt:
Es darf kein Kreis existieren!

4.) Falls $= n$ Kanten ausgewählt:
Es muss exakt ein Kreis existieren!

Man kann auch folgendes testen:

5.) Es darf keine kreuzenden Kanten geben!

Warum?
Betrachte Kreuzung



Es gilt: rot $\leq$ schwarz
und blau $\leq$ schwarz,
denn in der Ebene gilt die Dreiecksungleichung!

$$\boxed{d(P_i, P_j) + d(P_j, P_k) \geq d(P_i, P_k)}$$