(4) Betrachten wir den Baum
- und dabei jeweils

S: Positiv fixiert $(x_i = 1)$
$\bar{S}$: Negativ fixiert $(x_i = 0)$

• ← $S = \emptyset$, $\bar{S} = \emptyset$; $LB = 14$, $UB = 16$

Solange $LB \leq UB$, machen wir weiter
und $S \cup \bar{S} \neq \{1, \dots, 7\}$

$S = \emptyset$, $\bar{S} = \{1\}$ → $x_1 = 0$ ← Berechne UB!

$x_1 = 0$ bedeutet: Objekt 1 ist ausgeschlossen

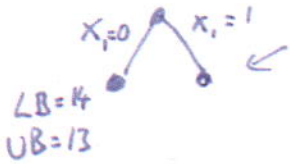
Damit Greedy für Fractional Knapsack:

$x_2 = 1 \Rightarrow \sum x_i z_i = 3$
$x_3 = 1 \Rightarrow \sum x_i z_i = 9 \Rightarrow x_4 = \dots = x_7 = 0$

Damit ist $\sum x_i p_i = 13 < 14$

Also ist dann nicht mehr als Nutzen 13 erreichbar; das ist schlechter als 14, $x_1 = 0$ ist also eine Sackgasse!

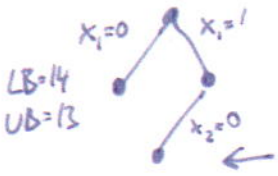
Also



Berechne UB : 16

Berechne LB : 14 (wie gehabt)

Dann



$S=\{1\}$, $\bar{S}=\{2\}$

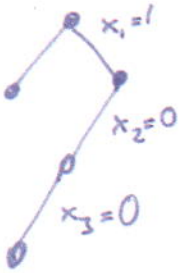
Berechne UB: $x_1=1$, $x_3=1$, $x_4=\frac{1}{7}$, $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 15\frac{2}{7}$

Also UB = 15 !

Berechne LB: $x_1=1$, $x_3=1$ $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 14$

Also LB = 14 !

Dann



Berechne UB: $x_1=1$, $x_4=1$, $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 15$

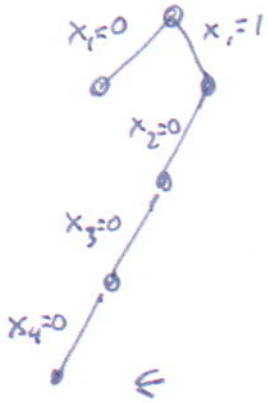
Also UB = 15 !

Berechne LB: $x_1=1$, $x_4=1$, $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 15$

Also LB = 15 !

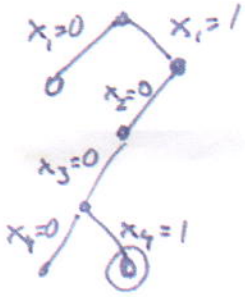
VL 7

32



Berechne UB: $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = \frac{2}{9}$, $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 13$

Das ist kleiner als 15, also Sackgasse!

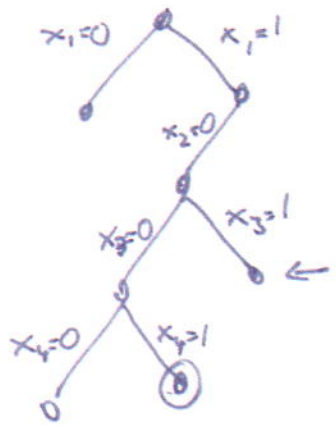


Hier (wie gesehen)
$UB = LB = 15$ für $S = \{1, 4\}$

~~Verwendung von anderen Objekten führt nur schlechtere Lösungen~~

Außerdem erfordert $x_1 = x_4 = 1$ dass
$Z - \sum x_i z_i = 0$, d.h. $x_5 = \ldots = x_7 = 0$.

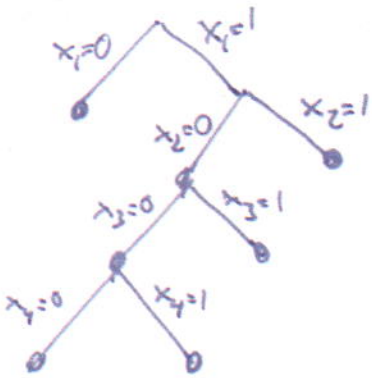
Damit:



$\leftarrow$ $Z - \sum_{i=1}^{3} x_i z_i = 1$ $\leftarrow$ zu klein für weitere Objekte!

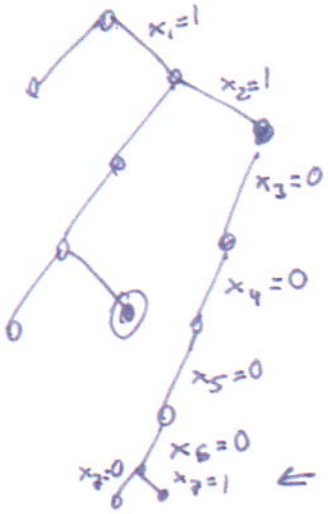
Damit $UB = 14 < 15$!

Damit



$\leftarrow$ $Z - \sum_{i=1}^{2} x_i z_i = 4$,

Dann passt nur noch Objekt 7, also $x_3 = \ldots = x_6 = 0$



$\leftarrow$ $x_1 = x_2 = x_7$

Damit $UB = 14 < 15$

$\boxed{\text{Also Optimum: } 15 \text{ für } S = \{1,4\}!}$

ALGORITHMUS 1.19 (BRANCH-AND-BOUND)

übergeben: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$ (global: Kostenwerte, Kostenschranke, Nutzwerte)

P (bester bekannter Lösungswert)

ℓ (nächster Index, über den verzweigt wird)

$x_j = b_j$ für $j = 1, \dots, \ell-1$ mit $b_j \in \{0,1\}$ (bislang fixierte Binärvariablen)

Ausgabe: $\max\left\{ \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j p_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j p_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j z_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j z_j \le Z,\ x_j \in \{0,1\} \right\}$

(Also: Lösung des Knapsackproblems mit den ersten $\ell-1$ Variablen fixiert)

Branch-and-Bound (ℓ)

1. IF $\left(\sum_{j=1}^{\ell-1} b_j z_j > Z\right)$ THEN RETURN // unzulässig
2. Compute $L := LB(b_1, \dots, b_{\ell-1})$; // untere Schranke berechnen
3. IF $(L > P)$ THEN // Lösung verbessert
   $P := L$;
4. IF $(\ell > n)$ THEN RETURN // Blatt im Enumerations-Baum erreicht
5. Compute $U := UB(b_1, \dots, b_{\ell-1})$; // Obere Schranke berechnen
6. IF $(U > P)$ THEN {
   $b_\ell := 0$; Branch-and-Bound $(\ell+1)$;
   $b_\ell := 1$; Branch-and-Bound $(\ell+1)$;
   }
7. RETURN

Dabei ist

$LB(b_1, \dots, b_{\ell-1})$

eine geeignete untere Schranke:

bel. Wert aus

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j p_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j p_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j z_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j z_j \leq Z,\ x_j \in \{0,1\} \right\}$$

(Berechnung mit ganzzahligem Greedy)

und

$UB(b_1, \dots, b_{\ell-1})$

eine geeignete obere Schranke:

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j p_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j p_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j z_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j z_j \leq Z,\ x_j \in [0,1] \right\}$$

Berechnung mit Greedy-Algorithmus 1.4!

<u>Satz 1.20</u>

Algorithmus 1.19 (als rekursiv arbeitende Unterroutine) berechnet in endlicher Zeit eine Optimallösung für das Knapsackproblem. Die Worst-Case-Laufzeit beträgt $O(n \cdot 2^n)$.

<u>Beweis:</u>

Es werden systematisch alle möglichen Teilmengen durchprobiert (und dabei Teilmengen nur dann ausgelassen, wenn sie unzulässig (1) sind oder keine Verbesserungen bringen (3)).

Die Zahl der Rekursionsaufrufe in (6) ist insgesamt 2^n, die sonstigen Berechnungen benötigen jeweils $O(n)$.

$\square$