46

11.06.13

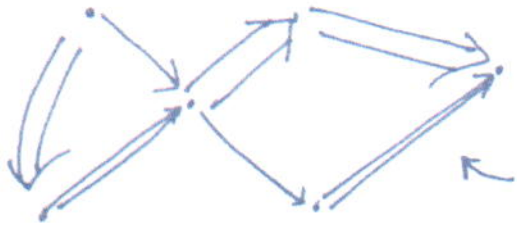
KAPITEL 4: Netzwerkflüsse

Flüsse in Graphen – Beispiele:
- Wasser in Leitungssystemen
- Verkehr in Straßensystemen
- Passagiere in Transportsystemen
- Geld in Wirtschaftssystemen
- Güter " "

Historisch: ~~[illegible] (1938)~~ Tolstoi (1930) Gütertransport in sowjetischem Eisenbahnsystem

Gemeinsames Prinzip:

(1)



← Zwei Kenngrößen pro Kante:
- Möglicher Fluß
- Tatsächlicher Fluß

(Später: Dritte Kenngröße – Kosten pro Flußeinheit)

(2) „Flußerhaltung" bedeutet Bilanzierung der Flüsse an jedem Knoten (→ Rechnungswesen ?!)

Kann überall oder an einigen Knoten gelten.

(Letzteres lässt sich auf ersteres reduzieren, indem man Verluste und Gewinne sucht!)

Definition 4.1

(1) Gegeben ein Digraph G mit Kapazitäten $u: E(G) \to \mathbb{R}_+$.
Ein Fluss ist eine Funktion

$$f: E(G) \to \mathbb{R}_+ \quad \text{mit}$$

$$f(e) \leq u(e) \qquad \text{für alle } e \in E(G).$$

(2) Flusserhaltung an einem Knoten v bedeutet, dass

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) \qquad \text{gilt.}$$

(3) Eine Zirkulation ist ein Fluss, für den überall Flusserhaltung gilt.

(4) Für ein Netzwerk (G, u, s, t) mit $s, t \in V(G)$ (ausgezeichnete Knoten in G) ist ein s-t-Fluss ein Fluss, der überall außer in s und t Flusserhaltung erfüllt. Man nennt

$$\text{Wert}(f) := \sum_{e \in \delta^+(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f(e)$$

$$\left(= \sum_{e \in \delta^-(t)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(t)} f(e) \right)$$

PROBLEM „MAXIMALER FLUSS" ("MAX FLOW")

Gegeben: Netzwerk (G, u, s, t)

Gesucht: s-t-Fluss von maximalem Wert.

Formulierung als ~~LP~~: Lineares Optimierungsproblem

$$\max F$$

$$\text{mit } \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e = F$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0 \quad \text{für } v \in V(G) \setminus \{s,t\}$$

$$0 \le f_e \le u_e$$

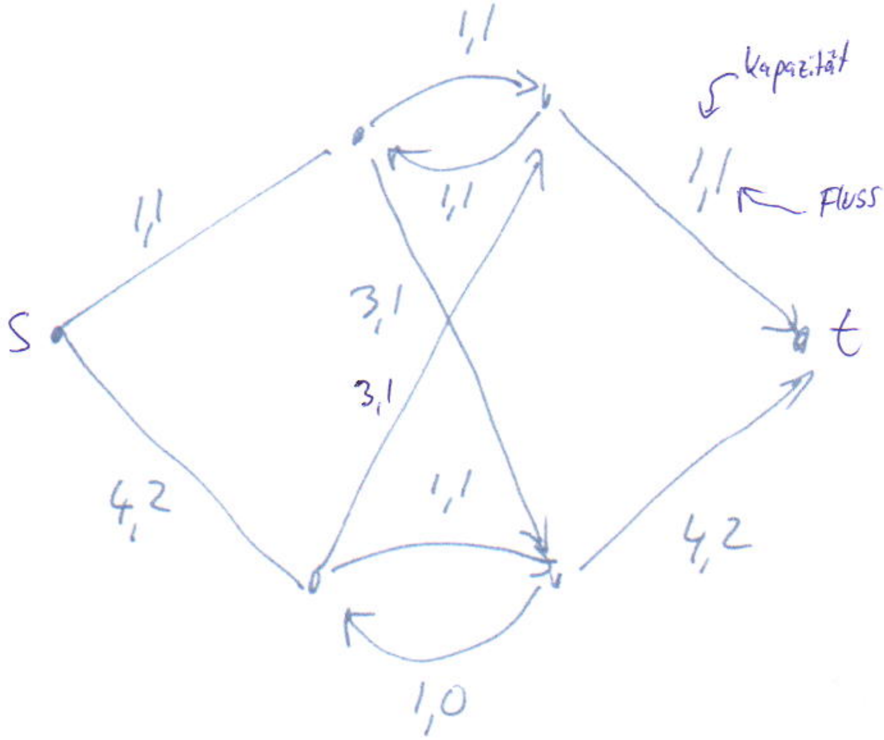
~~Lässt sich also mit Simplex o.ä. lösen.~~

~~Ziel hier: „Kombinatorische" Algorithmen, die intelligenter die Problemstruktur ausnutzen.~~

~~Beobachtung 4.2 Es gibt immer eine optimale Lösung:~~

~~Beweis: (a) LP ist zulässig, da $f_e = 0$ für alle e zulässig ist.~~
(b) LP ist offensichtlich beschränkt.

Beispiel:



- Wie kann man diesen Fluss verbessern?
- Welche obere Schranke gibt es?
- Was ist das Optimum?
- Wie findet man das algorithmisch?

Grundkonzept für die folgenden Algorithmen:

Flüsse erhöhen oder erniedrigen!

Beispiel:

(siehe 49!

-

Interpretation: Fluss erniedrigen ist gleichbedeutend mit „Fluss in entgegengesetzte Richtung schicken".

- Konsequenz dieser Idee:

Definition 4.2 (Residualgraph, augmentierende Pfade)

„Rest" „verbessernde"

(1) Für Digraph G ist

$$\overleftrightarrow{G} := \left(V(G),\ E(G) \,\dot{\cup}\, \{\overleftarrow{e} \mid e \in E(G)\}\right) \quad \text{mit}$$

$$\overleftarrow{e} = (w,v) \text{ für } e = (v,w) \quad (\text{die „Gegenkante" von } e)$$

der doppelt gerichtete Graph zu G.

(51)

(2) Für einen Fluss f in einem Digraphen G mit Kapazitäten $u: E(G) \to \mathbb{R}_+$ definieren wir die Residualkapazitäten u_f : $\begin{cases} u(e) - f(e) & \text{für Vorwärtskanten} \\ f(\overleftarrow{e}) & \text{für Rückwärtskanten} \end{cases}$

~~Interpretation~~

(3) Der Residualgraph G_f ist der Graph $\left(V(G),\ \{e \in E(\overleftrightarrow{G}) \mid u_f(e) > 0\}\right)$.

(4) Interpretation des Residualgraphen:

u_f auf Vorwärtskanten beschreibt, um wieviel man f noch erhöhen kann

u_f auf Rückwärtskanten beschreibt, um wieviel man f erniedrigen kann.

(5) Um für einen Fluss f und einen Pfad (oder Kreis) P in G_f den Fluss entlang $\underset{\text{um } \gamma}{P}$ zu augmentieren, muss man den Fluss für Vorwärtskanten um γ erhöhen, für Rückwärtskanten um γ reduzieren.

(6) Ein f-augmentierender Pfad in einem Netzwerk (G, u, s, t) mit einem Fluss f ist ein s-t-Pfad im Residualgraphen G_f.

Natürliche Konsequenz:

Algorithmus 4.3 (Ford - Fulkerson 1956)

Eingabe: Netzwerk (G, u, s, t)

Ausgabe: Ein s-t-Fluss von maximalem Wert

(1) Setze $f(e) = 0$ für alle $e \in E(G)$

(2) Finde einen f-augmentierenden Pfad P in G_f.
Falls keiner existiert: STOP

(3) Bestimme $\gamma := \min_{e \in E(P)} u_f(e)$
Erhöhe f entlang P um γ. GO TO (2)

In VL mit WHILE geschrieben!