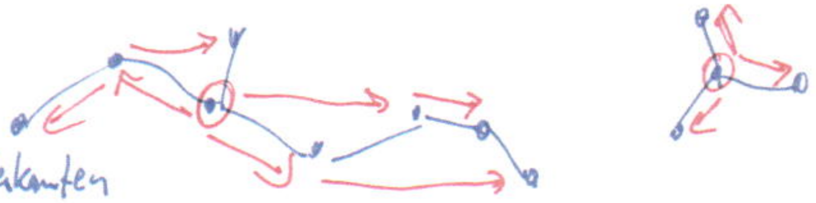
Beweis:

O.B.d.A. ist G einfach, also $m = O(n^2)$.
Betrachte nur den kritischen Schritt (3).

Idee: Datenstruktur, die die jeweils vorhandenen Zshgs.komp. verwaltet:

Kreis in (3) $\Longleftrightarrow$ Kante verbindet zwei Knoten in derselben ZK.

Lösung: Für jede Komponente merken wir uns einen gerichteten Baum mit einer eindeutigen Wurzel, wobei jeder Knoten einen eindeutigen Vorgänger bekommt:



— Komponentenkanten

— ~~[illegible]~~
Ger. Baum logarithmischer Höhe!

Das liefert eine Struktur B mit $V(B) = V(T)$
und $|E(B)| = |E(T)|$.

Wenn wir eine Kante $e_i = \{v, w\}$ in
(3) überprüfen, finden wir die Wurzeln
r_v und r_w zu den Komponenten für
v und w. Zeitaufwand hierfür: $O(\log n)$
(Höhe des Baumes!)
$\hookrightarrow$ wird noch verifiziert!

Teste $r_v = r_w$?
Falls ja, überprüfe nächst Kante.
Falls nein, füge e_i zu T hinzu;
außerdem wird B um eine Kante ergänzt:
Sei $h(r)$ die maximale Länge eines Pfades
von r in B. Falls $h(r_v) \geq h(r_w)$,
dann füge Kante (r_v, r_w) in B ein,
ansonsten (r_w, r_v).

Wie ändert sich $h(r_v)$?
Falls $h(r_v) = h(r_w)$, dann erhöht sich der
Wert um 1, ansonsten bleibt er gleich.

<u>Behauptung:</u>

Ein gerichteter Teilbaum von B mit Wurzel r enthält mindestens $2^{h(r)}$ Knoten.

<u>Beweis durch Induktion:</u>

Anfangs gilt $B := (V(G), \emptyset)$, $h(v) := 0$, also gilt die Behauptung.

Außerdem gilt sie nach einer Kanteneinfügung, wenn $h(r)$ sich nicht ändert.

Ansonsten gilt $h(v) = h(w)$ vor der Einfügung, also hat jeder Teil mindestens $2^{h(v)}$ Knoten. Nach der Einfügung haben wir mindestens $2 \cdot 2^{h(v)} = 2^{h(v)+1}$ Knoten, also gilt die Behauptung.

Also haben wir jeweils logarithmische Höhe, wir erhalten also eine Komplexität von $O(m \log n)$.

$\square$

Damit kennen wir

- den Algorithmus
- seine Laufzeit (dank geeigneter Datenstruktur!)

Es fehlt noch: • die Korrektheit !!!

Dafür brauchen wir etwas Struktur...

2.3.2 Ein Struktursatz

Satz 2.9.

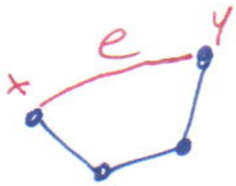
Sei (G,c) eine Instanz von MST, und sei T ein aufspannender Baum in G.

Minimum Spanning Tree

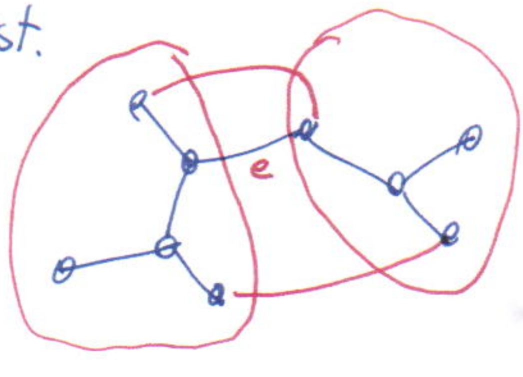
Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(a) T ist optimal.

(b) Für jede Kante $e = \{x,y\} \in E(G) \setminus E(T)$ hat keine Kante auf dem x-y-Pfad in T höhere Kosten als e.



(c) Für jedes $e \in E(T)$ ist e eine billigste Kante von $\delta(V(C))$, wobei C eine Zshgs.Komp. von $T - e$ ist.



Beweis:

$(a) \Rightarrow (b)$: (also $\neg(b) \Rightarrow \neg(a)$):

Falls (b) verletzt wäre, gäbe es eine Kante $e = \{x, y\} \in E(G) \setminus E(T)$ und eine Kante f auf dem x-y-Pfad in T mit $c(f) > c(e)$

Dann wäre $(T-f)+e$ ein aufspannender Baum mit geringerem Gesamtgewicht, im Widerspruch zu (a).

$(b) \Rightarrow (c)$ (also $\neg(c) \Rightarrow \neg(b)$):

Sei (c) verletzt, d.h. sei $e \in E(T)$ und sei C eine Zusammenhangskomponente von $T-e$ und $f = \{x, y\} \in \delta(V(C))$ mit $c(f) < c(e)$.

Der x-y-Pfad in T muss eine Kante von $\delta(V(C))$ enthalten; da aber e die einzige derartige Kante ist, ist (b) verletzt.

25

$(c) \Rightarrow (a)$:

Angenommen, T erfüllt (c).
Sei T^* ein optimaler Baum mit $E(T^*) \cap E(T)$ maximal. Wir zeigen $T = T^*$.

Angenommen wir haben eine Kante $e = \{x,y\} \in E(T) \setminus E(T^*)$.
Sei C eine Zusammenhangskomponente von $T - e$;
$T^* + e$ enthält einen Kreis D. Da $e \in E(D) \cap \delta(V(C))$
muss ~~das~~ noch eine weiter Kante $f \neq e$ von D zu $\delta(V(C))$ gehören.

$T^{**} = (T^* + e) - f$ ist ein aufspannender Baum.

Da T^* optimal ist, muss $c(e) \geq c(f)$ gelten.
Da aber (c) für T gilt, muss ~~auch~~ $c(e) \geq c(f)$ gelten; also ist $c(f) = c(e)$.
Damit ist auch $T^{**} = (T^* + e) - f$ ein optimaler aufspannender Baum, der eine Kante mehr mit T gemeinsam hat, im Widerspruch zur Eigenschaft von T^*.

Also gibt es keine Kante $e \in E(T) \setminus E(T^*)$, d.h. $T = T^*$. $\square$