65

09.07.13

Wie findet man alternierende Pfade?

Betrachte: Matchingkanten („schwarz")
Nichtmatchingkanten („weiß")
„suchende" Knoten („weiß")
„gleichgültige" Knoten („schwarz")

Starte bei einem ungematchten Knoten → „weiß".
Alle daran hängenden Kanten sind „weiß".
Falls Nachbarknoten ungematcht → Füge Kante hinzu
Falls alle gematcht → alle „schwarz",
daran angehängt: schwarze Kanten.

Betrachte entfernte Endknoten der schwarzen Kanten:
Falls einer davon anderweitig versorgbar,
entsteht ungerader alternierender Pfad → Augmentierung.
Färbe also alle entfernten Endknoten weiß und fahre fort!

Damit wechseln sich weiße und schwarze Knoten ab.

Also: Breitensuche!

- Für jede Zshgskomp. von G wähle einen ungematchten Knoten r als Wurzel.
  (Wortspiel: "covered" ≙ „überdeckt"
  "exposed" ≙ „entblößt")
- Wir nennen einen Knoten
  „schwarz", wenn er ungeraden Abstand von r hat;
  „weiß", wenn der Abstand gerade ist.

Also baut man Schritt für Schritt einen „alternierenden Wald"!

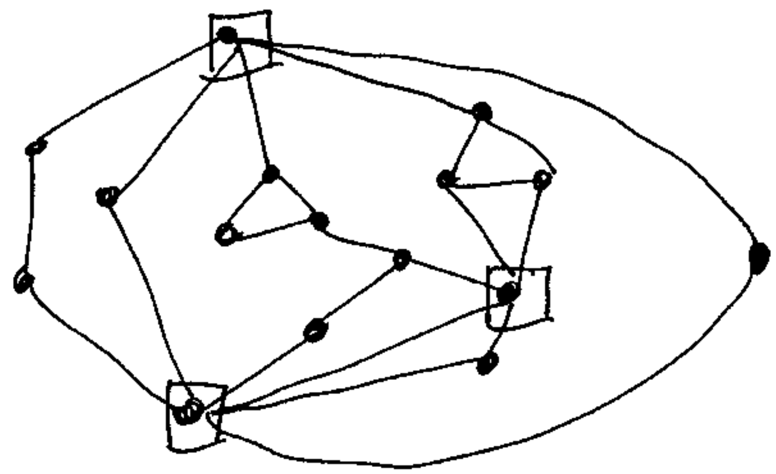
Betrachte : Suche nach einem perfekten Matching in einem allgemeinen Graphen

Voraussetzung für Existenz eines „guten" Algorithmuses:

„Gute Charakterisierung", d.h.

- Kurzer Beleg für Existenz → Matching
- Kurzer Beleg für Nichtexistenz → ?

Betrachte



Hat G ein perfektes Matching?

☐ Entfernen hinterlässt 6 Komponenten, 5 davon sind ungerade!

Satz 5.12

Satz von Tutte (1947)

Ein Graph $G = (V,E)$ hat ein perfektes Matching

$\Leftrightarrow$ Für jede Menge $A \subseteq V$ gilt
$$oc(G \setminus A) \leq |A|$$

Allgemeiner:

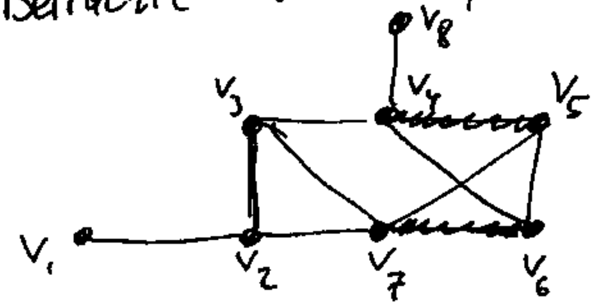
Satz 5.13 (Tutte-Berge-Formel 1958)

Für $G = (V,E)$ gilt
$$\max\{|M| \mid M \text{ ist Matching}\} = \min\left\{ \tfrac{1}{2}\left(|V| - oc(G\setminus A) + |A|\right) \mid A \subseteq V \right\}$$

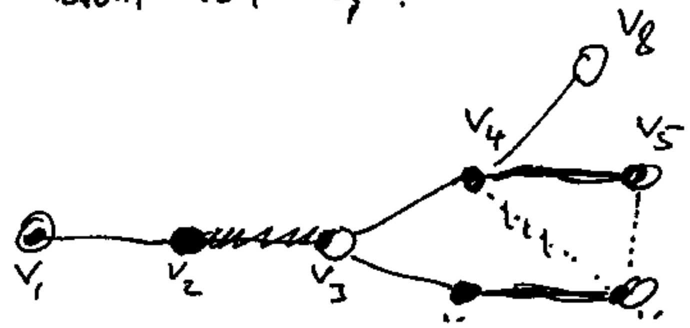
Also liefert uns die Menge $\square$ ein Argument, dass es kein Matching mit mehr als 6 Knoten geben kann.

Was geht im nicht bipartiten Fall schief? (69)

Betrachte das Beispiel:



Alternierender Baum von v_1:



5.4 Der Blossom-Algorithmus

~~Verallgemeinerung auf allgemeine Graphen!~~

Ausgangsgraph: G

Abgeleiteter Graph: G' (durch ein Serie von Schrumpfungen ungerader Kreise entstanden)

Knotentypen in G': „Originalknoten"

„Pseudoknoten" $\Leftarrow$ repräsentieren ungerade ~~Knotenmengen~~, die geschrumpft wurden

Also: Jeder Knoten $v \in V(G')$ repräsentiert eine ungerade Menge von Knoten $S(v) \subseteq V(G)$.

Klar: $S(v)$ ist immer ungerade!

(ungerade Vereinigung ungerader Mengen).

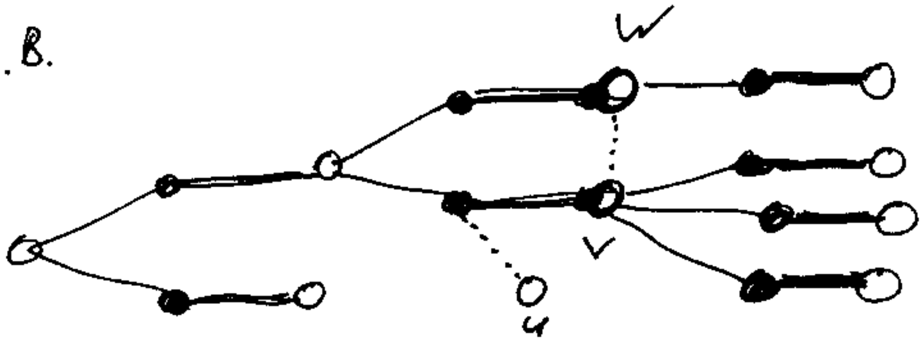
Also:

- abgeleiteter Graph hat perfektes Matching
  → liefert perfektes Matching im ursprünglichen Graphen.
- abgeleiteter Graph liefert Widerspruch
  → kein perfektes Matching in ursprünglichem Graphen!

Wie findet man ungerade Kreise zum Schrumpfen

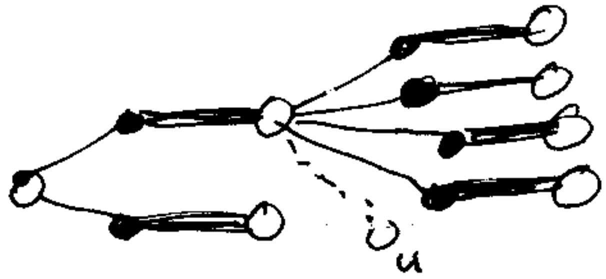
Schlüssel: Kanten von $W(T)$ nach $W(T)$!

Betrachte z.B.



Wegen Kante $\{v,w\}$ ist Baum nicht frustriert!
→ Kante liefert ungeraden Kreis!

Nach Schrumpfen:



Algorithmus 5.15 (Blossom-Algorithmus für perfektes Matching)

Eingabe: $G=(V,E)$

Ausgabe: Perfektes Matching M

oder ein Beweis, dass keines existiert

(1) Setze $M' = M = \emptyset$, $G' = G$

(2) Wähle einen ungematchten Knoten r in G',
setze $T = (\{r\}, \emptyset)$, $W(T) = \{r\}$, $S(T) = \emptyset$

(3) WHILE (es gibt $\{v,w\} \in E'$ mit $v \in W(T)$, $w \notin A(T)$) DO

CASE: w ist ungematcht

Benutze $\{v,w\}$, um M' zu augmentieren
Erweitere M' zu einem Matching M von G
Ersetze M' durch M, G' durch G
IF (es gibt keinen ungematchten Knoten in G)
RETURN perfektes Matching M in G
ELSE
Ersetze T durch $(\{r\}, \emptyset)$ mit r
ungematcht in M'

Case: $w \notin V(T)$, w ist in M' gematcht
Benutze $\{v,w\}$ um T zu erweitern.

Case: $w \in W(T)$
Benutze $\{v,w\}$ zum Schrumpfen
und Aktualisieren von M' und T.

RETURN G', M', T : G hat kein perfektes Matching

Benutze $\{v,w\}$ zum Schrumpfen und Aktualisieren von M' und T

Eingabe: Matching M' eines Graphen G',
M'-alternierender Baum T,
Kante $\{v,w\}$ von G' mit $v,w \in W(T)$

Sei C der Kreis, den $\{v,w\}$ zusammen mit dem Pfad von v nach w in T bildet.
Ersetze G' durch G'/C $\leftarrow$ C geschrumpft,
M' durch $M' \setminus E(C)$
T durch den Baum (in G') mit Kantenmenge $E(T) \setminus E(C)$

Satz 5.16

Algorithmus 5.15 terminiert nach (a) $O(n)$ Augmentierungen,
(b) $O(n^2)$ Schrumpfungen,
(c) $O(n^2)$ Baumerweiterungen.

Er entscheidet in korrekter Weise, ob G ein perfektes Matching hat.

Beweis:

M' ist immer ein Matching; da jede Augmentierung die Zahl der ungematchten Knoten verringert, ist (a) klar.

Zwischen Augmentierungen verringert jede Schrumpfung die Zahl der Knoten in G', während jede Baumerweiterung die Zahl der Knoten nicht in $V(T)$ verringert. Also ist diese Zahl von Schritten zwischen Augmentierungen durch $O(n)$ begrenzt, was (b) und (c) impliziert.

Wenn der Algorithmus terminiert, dann ist das Ergebnis nach Satz 6.12 korrekt. $\square$

Maximales Matching

Am Ende von Algorithmus 5.14 haben wir:

- einen frustrierten Baum T:
  - die Wurzel ist ungematcht
  - Entfernen der schwarzen Knoten zeigt, dass ~~innerhalb des~~ Knoten des Baumes ~~kein~~ ~~gefunden~~ nicht für alle weißen Knoten Matching-Partner gefunden werden können.

Sind wir damit fertig?

Nein! Es kann anderswo noch ungematchte Knoten geben, für die sich Nachbarn finden lassen. Dort müssen wir weitersuchen.

Algorithmus 5.17

Wie Algorithmus 5.15;

Am Ende: Entferne $V(T)$ aus G.

~~falls~~ if (Es gibt einen ungematchten Knoten)

CONTINUE mit Algorithmus 5.15

Satz 5.18

Algorithmus 5.17 bestimmt ein maximales Matching.

Beweis:

Angenommen, wir entfernen nacheinander die Bäume $T_1, \dots, T_k$. Dann sind in G am Ende nur die k Wurzeln ungematcht.

Entfernen aller schwarzen Knoten aus allen Bäumen hinterlässt für jeden Baum eine weiße ungerade Komponente mehr, also haben wir

$$oc(G \setminus S) = |S| + k.$$

Da wir ein Matching der Größe $|S|$ haben, ist dieses optimal. $\square$

~~KOROLLAR~~ Bemerkung 5.19

Aus dem obigen kann man einen algorithmischen Beweis der Tutte-Berge-Formel ableiten.

Laufzeit:

Satz 5.20

Der Blossom-Algorithmus kann mit Laufzeit $O(n\, m \log n)$ implementiert werden.

Erläuterung:

Cook / Cunningham / Pulleyblank / Schrijver S. 141/42.