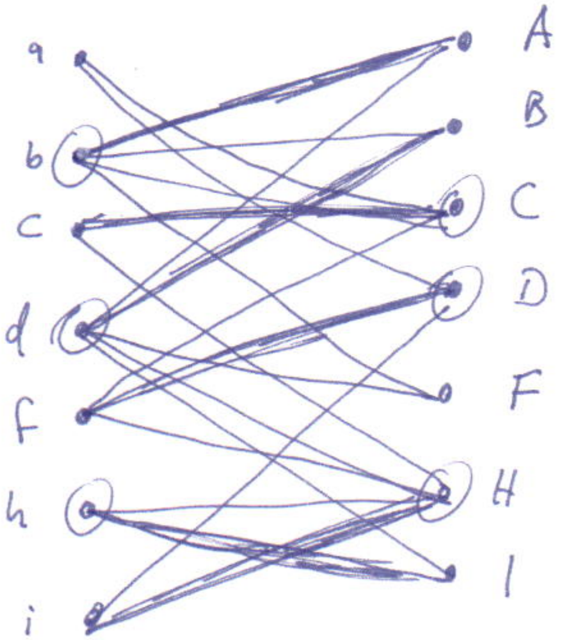
KAPITEL 5 MATCHING

5.1 Einstiegsbeispiel Kapitel 5 → Grundbegriffe

25.06.13

Beispiel 5.1



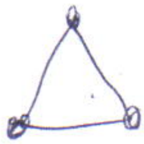
Problem 5.2 (Maximales Matching)

Problem 5.3 (Minimales Vertex Cover)

Satz 5.4

$$\max \mathrm{Mat} \le \min \mathrm{VC}$$

Beispiel 5.5



i.A. $\max \mathrm{Mat} < \min \mathrm{VC}$

KAPITEL 5.2 Maximale Matchings in Bipartiten Graphen

~~5.1 Grundbegriffe~~

Definition 5.6:

(1) Ein Matching in einem Graphen $G=(V,E)$ ist eine Menge paarweise disjunkter Kanten.

(2) Ein Matching heißt <u>perfekt</u>, wenn jeder Knoten in $V(G)$ überdeckt wird, d.h. zu einer Kante gehört.

(3) Ein Vertex Cover ist eine kantenüberdeckende Knotenmenge.

Problem „KARDINALITÄTSMATCHING"	
Gegeben:	Ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$.
Gesucht:	Ein Matching in G maximaler Kardinalität

(4) $\max \mathrm{Mat}(G) = \nu(G)$

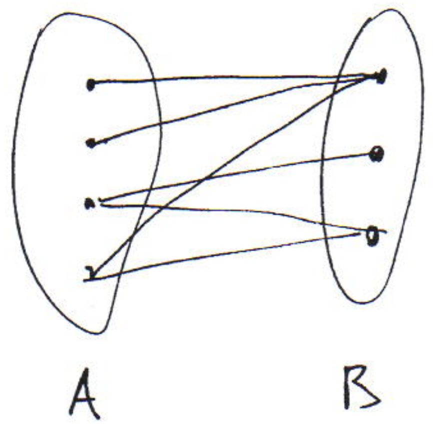
(5) $\min \mathrm{VC}(G) = \tau(G)$

(6) Ein Graph G heißt bipartit, wenn sich die Knotenmenge in zwei Teilmengen zerlegen lässt, d.h. $V = A \dot\cup B$, so dass jede Kante genau einen Knoten in A und einen in B hat.

Wesentliche Eigenschaft: Bipartite Graphen enthalten keine Kreise ungerader Länge.

~~[illegible]~~ Wenn G bipartit ist, dann besteht eine enge Beziehung zu Flussproblemen:

Aus $G = (A \cup B, E)$



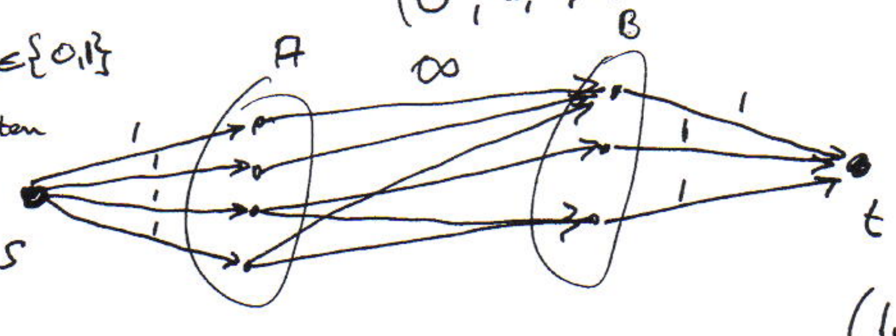
(Instanz bipartites Matching)

- ~~wenn~~ zwei Knoten s, t, Kanten von s nach $v \in A$, von $w \in B$ nach t
- Kanten von links nach rechts richten
- $u(e) = 1$, $s \in e$ oder $t \in e$

  $u(e) = \infty$ const

wird (G', u, s, t)

- $f_e \in \{0,1\}$
- Kanten mit $f_e = 1$ sind disjunkt.



(Instanz Max Flow)

Man sieht:

Satz 5.7 Ein (bipartites) Matching maximaler ~~[illegible]~~ Kardinalität in G entspricht einem ~~maximalen~~ ganzzahligen Fluss in (G', u, s, t) und umgekehrt.

Beweis: (Kurzzusammenfassung von Bew. 5.7) Jedes Matching in G lässt sich direkt auf einen st-Fluss von gleichem Wert in (G, s, t) abbilden. Umgekehrt lässt sich jeder ganzzahlige Fluss auf ein Matching in G abbilden.

Da es immer einen ganzzahligen maximalen Fluss gibt, folgt die Behauptung insbesondere für maximales Matching und maximalen Fluss $\square$

KOROLLAR 5.8 (Satz von König-Égerváry)

In einem bipartiten Graphen G gilt

max Match = min Vertex Cover

~~Wobei ein Vertex~~

Beweis:

Beachte max Match = max Flow = min Cut = min Vertex Cover.

KOROLLAR 5.9

Das Kardinalitätsmatching kann in $O(nm)$ gelöst werden.

Beweis:

Betrachte Ford-Fulkerson für das äquivalente Flussproblem. Eine Augmentierung benötigt $O(m)$, und es gibt höchstens $O(n)$ Augmentierungen. $\square$