24.06.13

Satz 4.6

Ein s-t-Fluss f ist optimal $\Leftrightarrow$ Es gibt keinen f-augmentierenden Pfad

Also stoppt der Algorithmus mit einem Optimalwert, wenn er stoppt.
(Wie wir noch sehen werden ist das „wenn" und „wann" u.U. etwas problematisch!)

Beweis:

„$\Rightarrow$" Wenn es einen augmentierenden Pfad gibt, wird von Algorithmus 4.5 in (3) ein besser Fluss berechnet, also kann f nicht maximal sein.

„$\Leftarrow$" Wenn es keinen augmentierenden Pfad gibt, dann ist t in G_f nicht von s aus erreichbar.
Sei R die Menge der von s aus in G_f erreichbaren Knoten. Nach Definition ~~ist~~ von G_f ist also
für alle $e \in \delta_G^+(R)$: $f(e) = u(e)$
für alle $e \in \delta_G^-(R)$: $f(e) = 0$.

Also ist nach Lemma 4.3 (a)

$$\text{Wert}(f) = \sum_{e \in \delta^+(R)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(R)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(R)} u(e) .$$

Nach Lemma 4.3 (b) ist $\sum_{e \in \delta^+(R)} u(e)$ aber eine obere Schranke fürs Optimum, also f optimal.

$\square$

Interpretation:

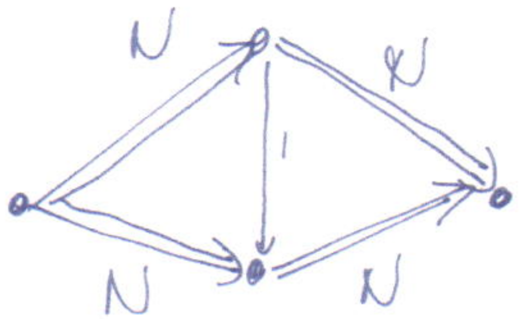
Satz 4.7 (Max Flow - Min Cut)

In jedem Netzwerk ist der maximale Wert eines s-t-Flusses gleich dem minimalen Kapazität eines s-t-Schnittes.

Historisch:
Harris + Ross ~~Ford und Fulkerson~~ untersuchten 1955 ~~[illegible]~~ einen minimalen Schnitt im selben sowjetischen Eisenbahnnetz, für des ~~[illegible]~~ Tolstoi 1930 einen maximalen Fluss bestimmt hatte!

Schwierigkeit mit Ford-Fulkerson:

Beispiel 4.8



Bei „schlechter" Wahl der augmentierenden Pfade kann der Algorithmus u.U. sehr lange benötigen – hier N Augmentierungen!

Lösung:

ALGORITHMUS 4.9 (Edmonds-Karp 1972)

Eingabe : (G, u, s, t)

Ausgabe : Ein s-t-Fluss maximalen Werts

(1) Setze $f(e) = 0$ für alle $e \in E(G)$

(2) Bestimme einen kürzesten f-augmentierenden Pfad P
Wenn es keinen gibt : STOP

(3) Berechne $\gamma := \min_{e \in E(P)} u_f(e)$.
Augmentiere f entlang P um γ, GOTO (2)

Also sollte man [illegible] von Algorithmus 4.5 mit BFS implementieren!

Ohne Beweise:

Satz 4.10 (Edmonds und Karp 1972)

Unabhängig von den Kapazitäten stoppt der Edmonds-Karp-Algorithmus nach höchstens $\frac{mn}{2}$ Augmentierungen.

Korollar 4.11

Der Edmonds-Karp-Algorithmus terminiert in $O(m^2 n)$ Schritten.

Beweis:

Jede Augmentierung kann mit BFS in $O(m)$ durchgeführt werden.