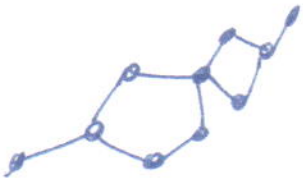
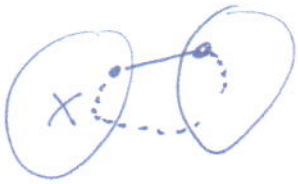
(a) ⇒ (g)

Weil T zshgd. ist, muss es je einen Pfad geben; gäbe es zwischen zwei Knoten mehr als einen Pfad, so enthielte die Vereinigung der Pfade einen Kreis, was nicht sein kann, weil T kreisfrei ist.



(g) ⇒ (e)

T ist zusammenhängend; könnte man eine Kante entfernen, ohne dass die Eigenschaft aus (e) verloren ginge, müsste es einen zweiten Pfad geben.



(e) ⇒ (d)

Ist klar!

(d) ⇒ (f) ~~ist klar~~

Da alle Knoten bereits verbunden sind, liefert jede eingefügte Kante einen Kreis.

(f) ⇒ (b)

und (b) ⇒ (c)

Man zeigt durch Induktion über m, dass für Wälder mit n Knoten, m Kanten und p Zshs.komp.

$$(*) \quad n = m+p \quad \text{gilt.}$$

Wir verwenden Lemma 2.5! (gleiche Aussage)

(Wie oben gesehen: 1 Kante hinzufügen reduziert Zshgs.komp. um 1!)

(c) ⇒ (a)

Sei T zshgd mit $n-1$ Kanten.

Angenommen, es gibt darin einen Kreis; dann entfernen wir daraus eine Kante. Das machen wir fort, bis keine Kreise mehr existieren, schließlich haben wir k Kanten entfernt.

Der verbleibende Graph ist immer noch zshgd. + kreisfrei und hat $m = (n-1)-k$ Kanten, aber nur $p=1$ Komponente.

Also ist

$$(*) \quad n = m+p = (n-1-k)+1,$$

d.h. $k=0$ $\square$

2.3 Berechnung optimaler Bäume

Historisch: Borůvka (1926), Kruskal (1956) } „Kruskal"

Jarník (1930), Prim (1957) } „Prim"

Später mehr!

2.3.1. Kruskals Algorithmus

Algorithmus 2.7 (Kruskal)

Eingabe: G: zshgder. ungerichteter Graph
c: Kantengewichte $E(G) \to \mathbb{R}$

Ausgabe: Aufspannender Baum T minimalen Gewichts

1. Sortiere die Kanten nach Gewicht, so dass
$$c(e_{\pi(1)}) \leq c(e_{\pi(2)}) \leq \ldots \leq c(e_{\pi(m)})$$
2. Setze $T := (V(G), \emptyset)$
3. FOR $i=1$ TO m DO
   IF ($T + e_{\pi(i)}$ enthält keinen Kreis) THEN
   $T := \underline{T + e_{\pi(i)}}$ ← Kurznotation für $(V(G), E(T) \cup \{e_{\pi(i)}\})$

Laufzeit ?!

(1) Sortieren der Kanten : $O(m \log m)$
$(= O(m \log n))$

Also kritisch:

(3) Teste Kreisfreiheit !

→ Problem:
Gegeben: ~~kost~~ Graph G' mit höchstens $(n-1)$ Kanten, Kante e
Frage : Ist $G'+e$ kreisfrei ?

→ Lösung in $O(n)$ mit DFS oder BFS

Insgesamt m-mal, also $O(mn)$ für diesen Schritt,
also auch für den Algorithmus.

Besser ?!

Satz 2.8

Kruskals Algorithmus lässt sich so implementieren,
dass die Laufzeit $O(m \log m)$ ist.

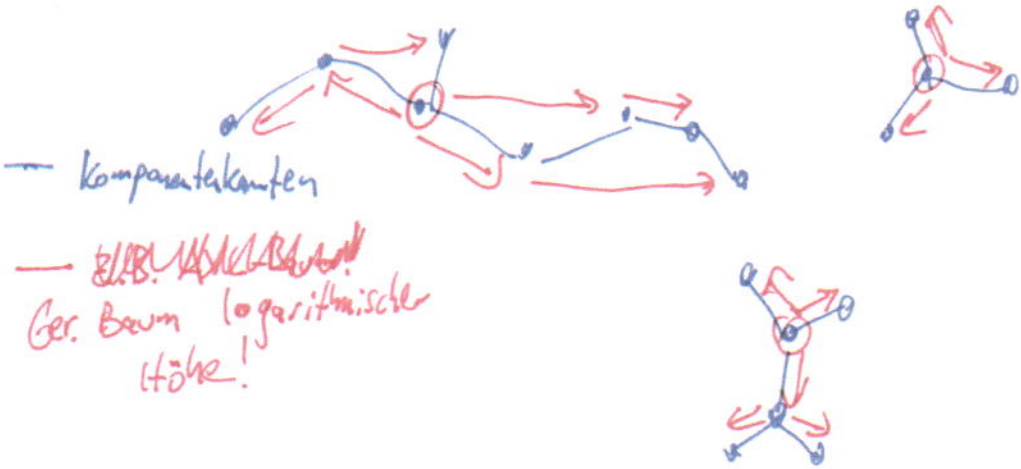
Beweis:

O.B.d.A. ist G einfach, also $m = O(n^2)$.
Betrachte nur den kritischen Schritt (3).

Idee: Datenstruktur, die die jeweils vorhandenen Zshgs.komp. verwaltet:

Kreis in (3) $\Leftrightarrow$ Kante verbindet zwei Knoten in derselben ZK.

Lösung: Für jede Komponente merken wir uns einen gerichteten Baum mit einer eindeutigen Wurzel, wobei jeder Knoten einen eindeutigen Vorgänger bekommt:



Das liefert eine Struktur B mit $V(B) = V(T)$ und $|E(B)| = |E(T)|$.