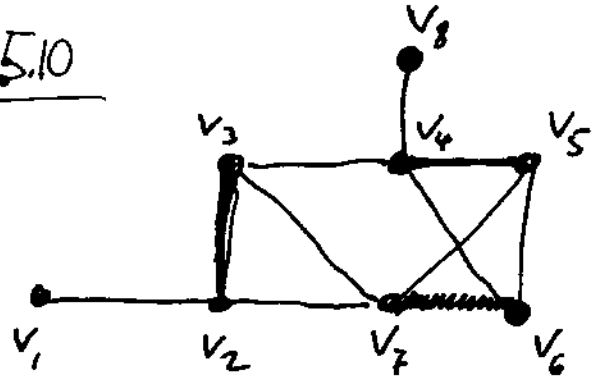
5.3 Allgemeine Graphen

Beispiel 5.10



(a) Gibt es ein besseres Matching?

(b) Gibt es einen alternierenden Pfad von v_1 nach v_8?

(c) Wie findet man ihn?

(a) Matche v_1 mit v_2
v_8 mit v_4
v_3 mit v_7
v_5 mit v_6.

(b) $v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5, v_4, v_8$

(c) Betrachte ~~symmetrische Diff~~ Vereinigung der beiden Matchings!

Antwort (c) ist genügend und unbefriedigend!

Genauer gefragt:

(A) Wann lässt sich ein Matching M in einem (nicht unbedingt bipartiten) Graphen G durch einen alternierenden Pfad verbessern?

(B) Wie lässt sich algoritmisch entscheiden, ob es einen alternierenden Pfad gibt?

Antwort auf (A):

<u>Satz 5.11</u> (Berge 1957)

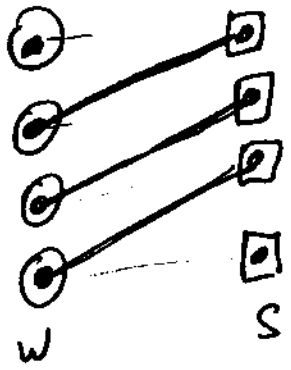
Sei G ein Graph, M ein Matching in G. Dann ist M maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Pfad.

<u>Beweis:</u>

„$\Rightarrow$" Sei P ein M-augmentierender Pfad. Dann ist die symmetrische Differenz $M \triangle E(P)$ ein Matching größerer Kardinalität.

„$\Leftarrow$" Sei umgekehrt M' ein Matching mit $|M'| > |M|$. Die symmetrische Differenz $M \Delta M'$ ist die knotendisjunkte Vereinigung alternierender Kreise und Pfade; mindestens einer der Pfade muss M-augmentierend sein. $\square$

Beispiel:

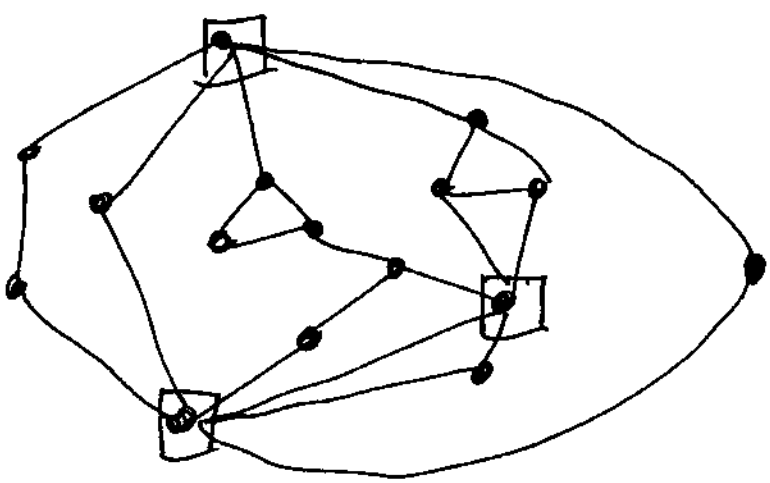


Betrachte : Suche nach einem perfekten Matching in einem allgemeinen Graphen

Voraussetzung für Existenz eines „guten" Algorithmuses :
„Gute Charakterisierung", d.h.

- Kurzer Beleg für Existenz → Matching
- Kurzer Beleg für Nichtexistenz → ?

Betrachte



Hat G ein perfektes Matching?

□ Entfernen hinterlässt 6 Komponenten, 5 davon sind ungerade!

Satz 5.12

Satz von Tutte (1947)

Ein Graph $G = (V, E)$ hat ein perfektes Matching

$\Longleftrightarrow$ Für jede Menge $A \subseteq V$ gilt

$$oc(G \setminus A) \leq |A|$$

Allgemeiner:

Satz 5.13 (Tutte-Berge-Formel 1958)

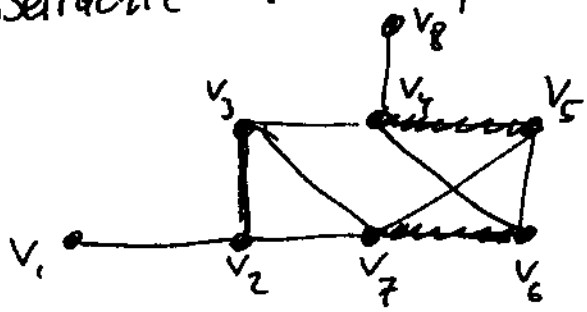
Für $G = (V, E)$ gilt

$$\max\{|M| \mid M \text{ ist Matching}\} = \min\left\{ \tfrac{1}{2}\left(|V| - oc(G \setminus A) + |A|\right) \;\middle|\; A \subseteq V \right\}$$

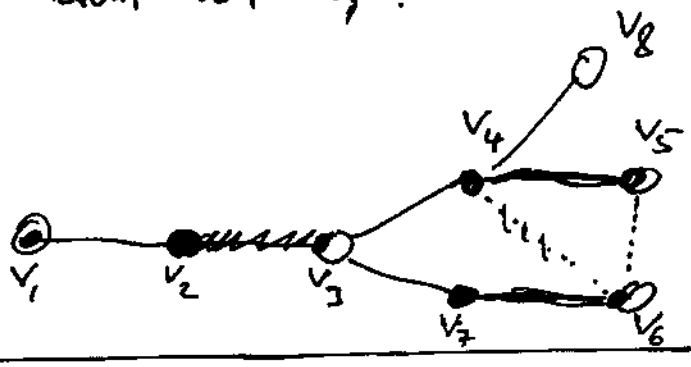
Also liefert uns die Menge $\square$ ein Argument, dass es kein Matching mit mehr als 6 Knoten geben kann.

Was geht im nicht bipartiten Fall schief?

Betrachte das Beispiel:



Alternierender Baum von v_1:



5.4 Der Blossom-Algorithmus

Dazu sei

~~Verallgemeinerung auf allgemeine Graphen!~~

Ausgangsgraph: G

Abgeleiteter Graph: G' (durch ein Serie von Schrumpfungen ungerader Kreise entstanden)

Knotentypen in G': „Original Knoten"
„Pseudoknoten" ← repräsentieren ungerade ~~Knotenmengen~~, die geschrumpft worden

Also: Jeder Knoten $v \in V(G')$ repräsentiert eine ungerade Menge von Knoten

$$S(v) \subseteq V(G).$$

Klar: $S(v)$ ist immer ungerade!
(ungerade Vereinigung ungerader Mengen).

Satz 5.14

Sei G' ein ~~abgeleiteter~~ Graph von G, sei M' ein Matching in G', und sei T ein M'-alternierender Baum von G', so dass

- kein Element von $S(T)$ ein Pseudoknoten ist.

Baum ist radial

Wenn jede Kante mit einem Ende in $W(T)$ das andere Ende in $S(T)$ hat, dann hat G kein perfektes Matching.

Beweis:

- Entfernt man $S(T)$ aus G, dann erhält man im ursprünglichen Graphen aus jedem $v \in W(T)$ eine ungerade Komponente $S(v)$. Also gilt $oc(G \setminus S(T)) > |S(T)|$, d.h. G hat kein perfektes Matching. $\square$

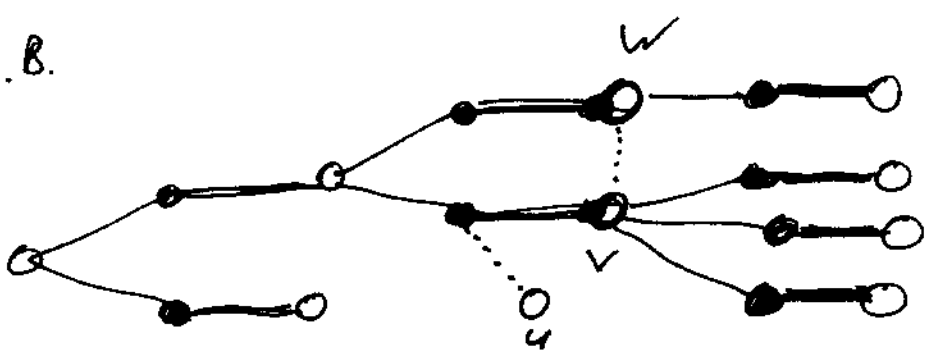
Also:

- abgeleiteter Graph hat perfektes Matching
  → liefert perfektes Matching im ursprünglichen Graphen.
- abgeleiteter Graph liefert Widerspruch
  → kein perfektes Matching im ursprünglichen Graphen!

Wie findet man ungerade Kreise zum Schrumpfen

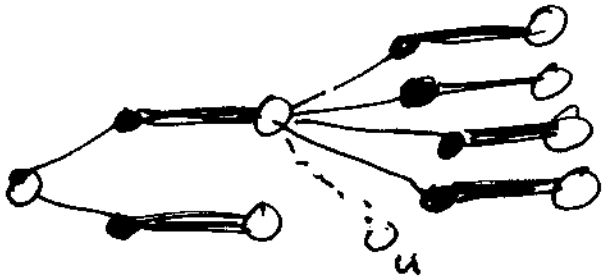
Schlüssel: Kanten von $W(T)$ nach $W(T)$!

Betrachte z.B.



Wegen Kante $\{v,w\}$ ist Baum nicht frustriert!
→ Kante liefert ungeraden Kreis!

Nach Schrumpfen:



Algorithmus 5.15 (Blossom-Algorithmus für perfektes Matching)

Eingabe: $G=(V,E)$

Ausgabe: Perfektes Matching M

oder ein Beweis, dass keines existiert

(1) Setze $M' = M = \emptyset$, $G' = G$

(2) Wähle einen ungematchten Knoten r in G',
Setze $T = (\{r\}, \emptyset)$, $W(T) = \{r\}$, $S(T) = \emptyset$

(3) WHILE (es gibt $\{v,w\} \in E'$ mit $v \in W(T)$, $w \notin A(T)$) DO

CASE: w ist ungematcht

Benutze $\{v,w\}$, um M' zu augmentieren
Erweitere M' zu einem Matching M von G
Ersetze M' durch M, G' durch G
IF (es gibt keinen ungematchten Knoten in G)
RETURN perfektes Matching M in G
ELSE
Ersetze T durch $(\{r\}, \emptyset)$ mit r ungematcht in M'

Case: $w \notin V(T)$, w ist in M' gematcht
Benutze $\{v,w\}$ um T zu erweitern.

Case: $w \in W(T)$
Benutze $\{v,w\}$ zum Schrumpfen
und Aktualisieren von M' und T.

RETURN G', M', T : G hat kein perfektes Matching

<u>Benutze $\{v,w\}$ zum Schrumpfen und Aktualisieren von M' und T</u>

Eingabe: Matching M' eines Graphen G',
M'-alternierender Baum T,
Kante $\{v,w\}$ von G' mit $v,w \in W(T)$

Sei C der Kreis, den $\{v,w\}$ zusammen mit dem Pfad von v nach w in T bildet.

Ersetze G' durch G'/C ← C geschrumpft,
M' durch $M' \setminus E(C)$
T durch den Baum (in G')
mit Kantenmenge $E(T) \setminus E(C)$

Satz 5.15

Algorithmus 5.15 terminiert nach (a) $O(n)$ Augmentierungen,
(b) $O(n^2)$ Schrumpfungen,
(c) $O(m^2)$ Baumerweiterungen.

Er entscheidet in korrekter Weise, ob G ein perfektes Matching hat.

Beweis:

M' ist immer ein Matching; da jede Augmentierung die Zahl der ungematchten Knoten verringert, ist (a) klar.

Zwischen Augmentierungen verringert jede Schrumpfung die Zahl der Knoten in G', während jede Baumerweiterung die Zahl der Knoten nicht in $V(T)$ verringert. Also ist diese Zahl von Schritten zwischen Augmentierungen durch $O(n)$ begrenzt, was (b) und (c) impliziert.

Wenn der Algorithmus terminiert, dann ist das Ergebnis nach Satz 6.12 korrekt. $\square$

Maximales Matching

Am Ende von Algorithmus 5.14 haben wir:

- einen frustrierten Baum T:
  - die Wurzel ist ungematcht
  - Entfernen der schwarzen Knoten zeigt, dass ~~innerhalb des~~ ~~Baumes~~ ~~kein~~ ~~perfektes~~ nicht für alle weißen Knoten Matching-Partner gefunden werden können.

Sind wir damit fertig?

Nein! Es kann anderswo noch ungematchte Knoten geben, für die sich Nachbarn finden lassen. Dort müssen wir weitersuchen.

Algorithmus 5.17

Wie Algorithmus 5.15;

Am Ende: Entferne $V(T)$ aus G.

~~falls~~ (Es gibt einen ungematchten Knoten)

CONTINUE mit Algorithmus 5.15

Satz 5.18

Algorithmus 5.17 bestimmt ein maximales Matching.

Beweis:

Angenommen, wir entfernen nacheinander die Bäume $T_1, \dots, T_k$. Dann sind in G am Ende nur die k Wurzeln ungematcht.

Entfernen aller schwarzen Knoten aus allen Bäumen hinterlässt für jeden Baum eine weiße Ungerade Komponente mehr, also haben wir

$$oc(G \setminus S) = |S| + k.$$

Da wir ein Matching der Größe $|S|$ haben, ist dieses optimal. $\square$

Bemerkung ~~KOROLLAR~~ S. 19

Aus dem obigen kann man einen algorithmischen Beweis der Tutte-Berge-Formel ableiten.

Laufzeit:

Satz 5.20

Der Blossom-Algorithmus kann mit Laufzeit $O(n\,m \log n)$ implementiert werden.

Erläuterung:

Cook / Cunningham / Pulleyblank / Schrijver S. 141/42.