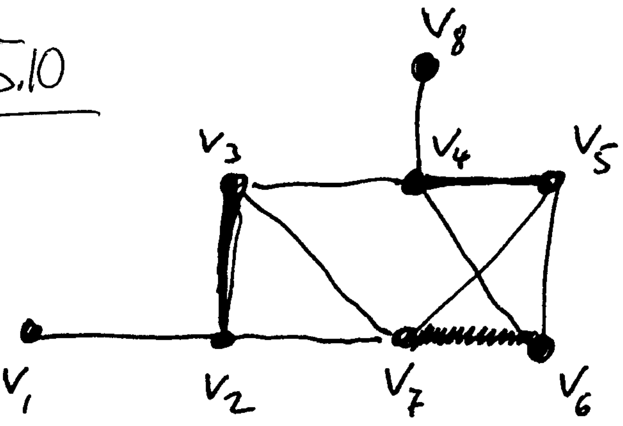
5.3 Allgemeine Graphen

05.07.11

Beispiel 5.10



(a) Gibt es ein besseres Matching?

(b) Gibt es einen alternierenden Pfad von v_1 nach v_8?

(c) Wie findet man ihn?

(a) Matche v_1 mit v_2
v_8 mit v_4
v_3 mit v_7
v_5 mit v_6.

(b) $v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5, v_4, v_8$

(c) Betrachte ~~symmetrische~~ ~~Diff~~ Vereinigung der beiden Matchings!

Antwort (c) ist gemogelt und unbefriedigend!

Genauer gefragt:

(A) Wann lässt sich ein Matching M in einem (nicht unbedingt bipartiten) Graphen G durch einen alternierenden Pfad verbessern?

(B) Wie lässt sich algoritmisch entscheiden, ob es einen alternierenden Pfad gibt?

Antwort auf (A):

<u>Satz 5.11</u> (Berge 1957)

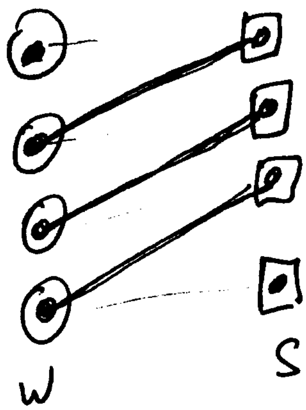
Sei G ein Graph, M ein Matching in G.
Dann ist M maximal $\Longleftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Pfad.

<u>Beweis:</u>

„$\Rightarrow$" Sei P ein M-augmentierender Pfad. Dann ist die Symmetrische Differenz $M \,\Delta\, E(P)$ ein Matching größerer Kardinalität.

„$\Leftarrow$" Sei umgekehrt M' ein Matching mit $|M'| > |M|$. Die symmetrische Differenz $M \Delta M'$ ist die knotendisjunkte Vereinigung alternierender Kreise und Pfade; mindestens einer der Pfade muss M-augmentierend sein. $\square$

Beispiel:



Wie findet man alternierende Pfade?

Betrachte:

Matchingkanten („schwarz")
Nichtmatchingkanten („weiß")
„suchende" Knoten („weiß")
„gleichgültige" Knoten („schwarz")

Starte bei einem ungematchten Knoten → „weiß".
Alle daran hängenden Kanten sind „weiß".
Falls Nachbarknoten ungematcht → Füge Kante hinzu
Falls alle gematcht → alle „schwarz",
daran angehängt: schwarze Kanten.

Betrachte entfernte Endknoten der schwarzen Kanten:
Falls einer davon anderweitig versorgbar,
entsteht ungerader alternierender Pfad → Augmentierung.
Färbe also alle entfernten Endknoten weiß und fahre fort!

Damit wechseln sich weiße und schwarze Knoten

Also : Breitensuche !

- Für jede Zshgskomp. von G wähle einen ungematchten Knoten r als Wurzel. (Wortspiel : "covered" $\hat{=}$ „überdeckt“ "exposed" $\hat{=}$ „entblößt“)
- Wir nennen einen Knoten „schwarz“, wenn er ungeraden Abstand von r hat; „weiß“, wenn der Abstand gerade ist.

Also baut man Schritt für Schritt einen „alternierenden Wald“ !

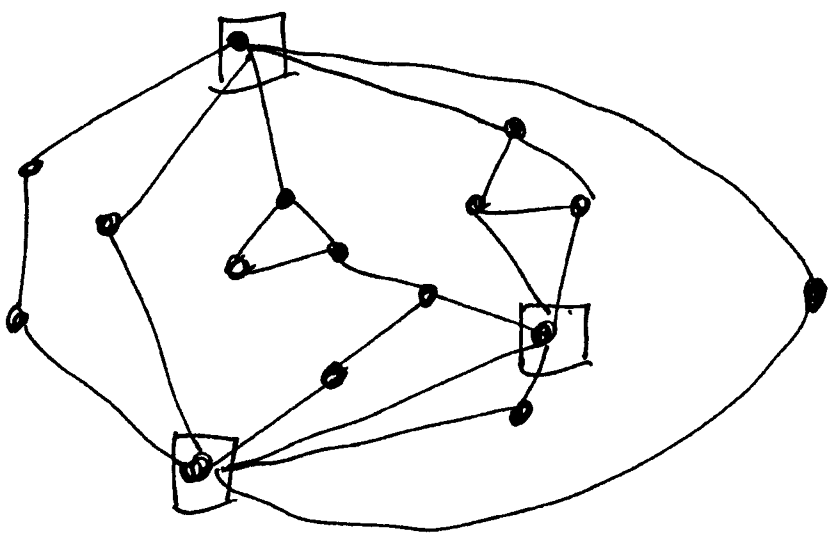
Betrachte: Suche nach einem perfekten Matching in einem allgemeinen Graphen

Voraussetzung für Existenz eines „guten" Algorithmuses:

„Gute Charakterisierung", d.h.

- kurzer Beleg für Existenz → Matching
- kurzer Beleg für Nichtexistenz → ?

Betrachte



Hat G ein perfektes Matching?

□ Entfernen hinterlässt 6 Komponenten, 5 davon sind ungerade!

Satz 5.12

Satz von Tutte (1947)

Ein Graph $G = (V, E)$ hat ein perfektes Matching

$\Leftrightarrow$ Für jede Menge $A \subseteq V$ gilt

$$oc(G \setminus A) \leq |A|$$

Allgemeiner:

Satz 5.13 (Tutte-Berge-Formel 1958)

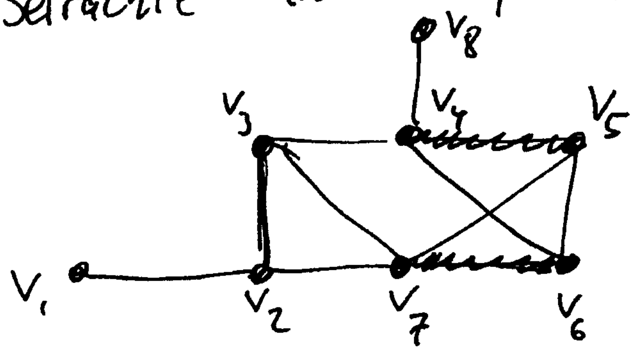
Für $G = (V, E)$ gilt

$$\max \{ |M| \mid M \text{ ist Matching} \} = \min \{ \tfrac{1}{2}(|V| - oc(G \setminus A) + |A|) \mid A \subseteq V \}$$

Also liefert uns die Menge $\square$ ein Argument, dass es kein Matching mit mehr als 6 Knoten geben kann.

Was geht im nicht bipartiten Fall schief?

Betrachte das Beispiel:



Alternierender Baum von v_1: