28.06.11

KAPITEL 5.2 Maximale Matchings in Bipartiten Graphen

~~5.1 Grundbegriffe~~

Definition 5.6:

(1) Ein Matching in einem Graphen $G=(V,E)$ ist eine Menge paarweise disjunkter Kanten.

(2) Ein Matching heißt perfekt, wenn jeder Knoten in $V(G)$ überdeckt wird, d.h. zu einer Kante gehört.

(3) Ein Vertex Cover ist eine kantenüberdeckende Knotenmenge.

Problem „KARDINALITÄTSMATCHING"	
Gegeben:	Ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$.
Gesucht:	Ein Matching in G maximaler Kardinalität

(4) $\max \mathrm{Mat}(G) = \nu(G)$

(5) $\min \mathrm{VC}(G) = \tau(G)$

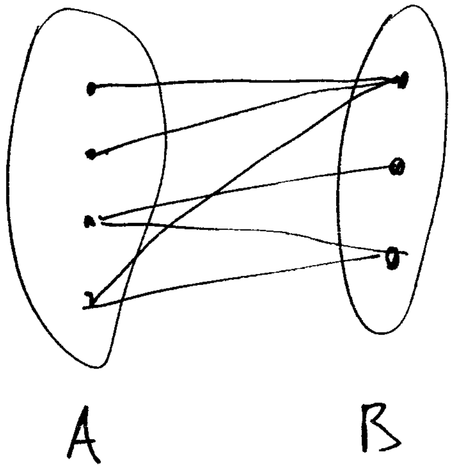
(6) Ein Graph G heißt bipartit, wenn sich die Knotenmenge in zwei Teilmengen zerlegen läßt, d.h. $V = A \dot\cup B$, so dass jede Kante genau einen Knoten in A und einen in B hat.

Wesentliche Eigenschaft: Bipartite Graphen enthalten keine Kreise ungerader Länge.

~~Bipartit~~ Wenn G bipartit ist, dann besteht eine enge Beziehung zu Flussproblemen:

Aus

$$G = (A \cup B, E)$$



(Instanz bipartites Matching)

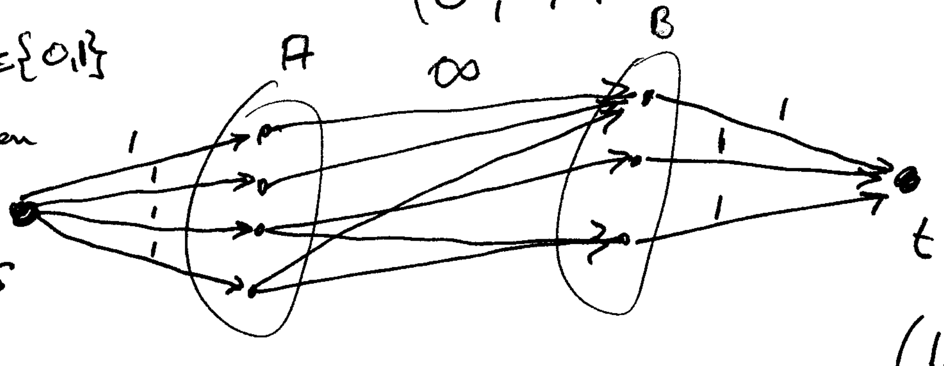
- neue zwei Knoten s, t, Kanten von s nach $v \in A$, von $w \in B$ nach t
- Kanten von links nach rechts richten
- $u(e) = 1$, $s \in e$ oder $t \in e$

$u(e) = \infty$ sonst

wird

$$(G', u, s, t)$$

- $f_e \in \{0, 1\}$
- Kanten mit $f_e = 1$ sind disjunkt.

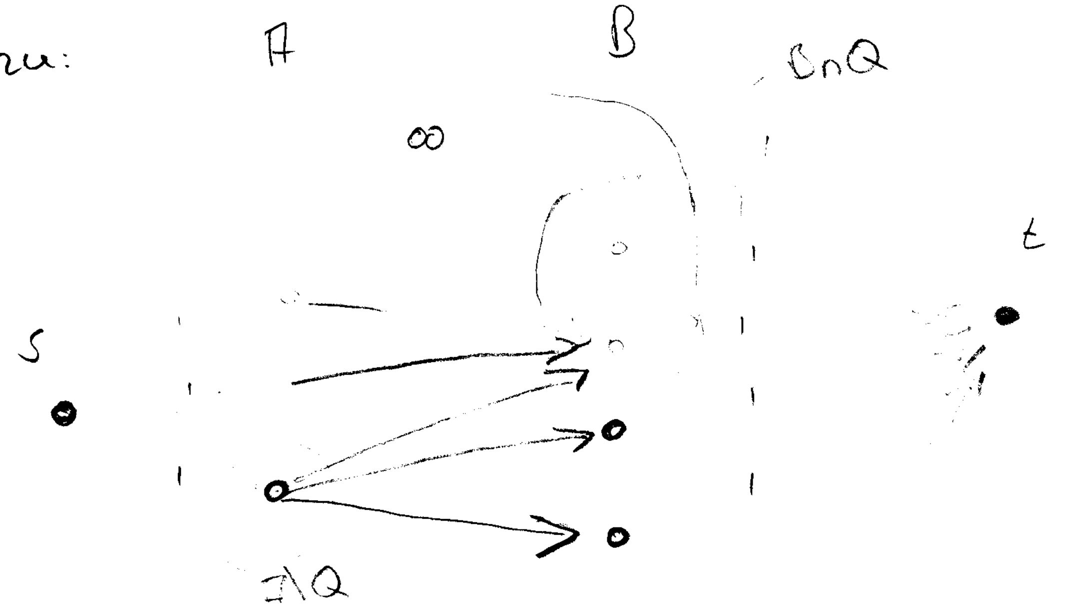


(Instanz Max Flow)

Man sieht:

<u>Satz 5.7</u> Ein (bipartites) Matching ~~Gebildet~~ maximaler Kardinalität in G entspricht einem ~~maximalen~~ ganzzahligen Fluss in (G', u, s, t) und umgekehrt.

Dazu:



Betrachte Min Cut $\delta^+(\{r\} \cup Q)$, $Q \subseteq V$. Dieser Cut hat endl. Kapazität d.h. es gibt keine Kante von $A \cap Q$ zu $B \setminus Q$.
Welche Kanten gibt es in G?

$A \cap Q$ zu $\underline{B \cap Q}$

$A \cap Q$ zu $B \setminus Q$ ↯

$\underline{A \setminus Q}$ zu $B \cap Q$

$\underline{A \setminus Q}$ zu $B \setminus Q$

Also ist jede Kante in G inzident zu einem Knoten aus

$$C = (A \setminus Q) \cup (B \cap Q)$$

d.h. C ist ein Cover der Größe $|C| = |A \setminus Q| + |B \cap Q|$.

Die Kapazität des Cuts ist ebenfalls $|C| = |A \setminus Q| + |B \cap Q|$ (nach Konstruktion),

d.h. insbesondere min Cut = min VC.

□

Beweis: (Kurzzusammenfassung von Bew. 5.7) Jedes Matching in G lässt sich direkt auf einen st-Fluss von gleichem Wert in (G', s, t) abbilden.

Umgekehrt lässt sich jeder ganzzahlige Fluss auf ein Matching in G abbilden.

Da es immer einen ganzzahligen maximalen Fluss gibt, folgt die Behauptung insbesondere für maximales Matching und maximalen Fluss. $\square$

KOROLLAR 5.8 (Satz von König-Égerváry)

In einem bipartiten Graphen G gilt

max Match = min Vertex Cover

~~(wobei ein Vertex~~

Beweis:

Beachte ✓ ✓

max Match = max Flow = min Cut = min Vertex Cover.

KOROLLAR 5.9

Das Kardinalitätsmatching kann in $O(nm)$ gelöst werden.

Beweis:

Betrachte Ford-Fulkerson für das äquivalente Flussproblem. Eine Augmentierung benötigt $O(m)$, und es gibt höchstens $O(n)$ Augmentierungen. $\square$