## Korollar 4.8

Wenn die Kapazitäten ganzzahlig sind, dann existiert ein ganzzahliger optimaler Fluss.

## Satz 4.9

In einem Netzwerk $(G, u, s, t)$ kann ein st-Fluss $f$ in Flüsse auf st-Pfaden und auf Kreisen dekomponiert werden:

$$f(e) = \sum_{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} : e \in P} (w(P))$$

mit
$\mathcal{P}$: Familie von Pfaden
$\mathcal{C}$: Familie von Kreisen
$w(P)$: Konstanter Fluss auf Pfad oder Kreis $P$.

Außerdem ist $|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \leq |E(G)|$

Und: $f$ ganzzahlig erlaubt $w$ ganzzahlig.

Beweis:

Induktion über die Zahl der Kanten mit positivem Fluss.

Sei $e = (v_0, w_0)$ eine Kante mit minimalem $f(e) > 0$.

Falls $w_0 \neq t$, dann muss es eine Kante $(w_0, w_1)$ mit positivem Fluss geben; dies lässt sich immer weiter fortsetzen, bis $w_i \in \{t, v_0, w_0, \ldots, w_{i-1}\}$ ist. (Tritt sicher ein, da Kantenzahl endlich)

Das gleiche lässt sich in der „anderen Richtung" anwenden, indem man sukzessive Vorgänger-Knoten sucht.

Am Ende hat man entweder einen Kreis mit überall positivem Fluss, der Kante $e$ enthält, oder einen $s$-$v_0$-$w_0$-$t$-Pfad mit überall positivem Fluss.

Setzt man $w(P) = f(e)$ und entfernt diesen Fluss

(d.h. $f'(e) = f(e) - w(P)$ auf $e \in P$
und $f'(e) = f(e)$ auf $e \notin P$),

so hat man die Zahl der Kanten mit positivem Fluss reduziert und die Behauptung gilt nach Induktionsannahme.

$\square$

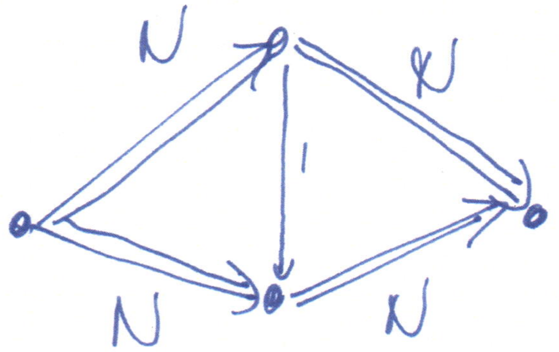
(58): ausgelassen!

(59)

21.06.11

Schwierigkeit mit Ford-Fulkerson:

Beispiel 4.8




Bei „schlechter" Wahl der augmentierenden Pfade kann der Algorithmus u.U. sehr lange benötigen – hier $N$ Augmentierungen!

Lösung:

**ALGORITHMUS 4.9** (Edmonds-Karp 1972)

Eingabe: $(G, u, s, t)$

Ausgabe: Ein $s$-$t$-Fluss maximalen Werts

(1) Setze $f(e) = 0$ für alle $e \in E(G)$

(2) Bestimme einen kürzesten $f$-augmentierenden Pfad $P$
Wenn es keinen gibt: STOP

(3) Berechne $\gamma := \min_{e \in E(P)} u_f(e)$.
Augmentiere $f$ entlang $P$ um $\gamma$, GO TO (2)

Also sollte man [illegible] von Algorithmus 4.5 mit BFS implementieren!

Ohne Beweise:

**Satz 4.10** (Edmonds und Karp 1972)

Unabhängig von den Kapazitäten stoppt der Edmonds-Karp-Algorithmus nach höchstens $\frac{mn}{2}$ Augmentierungen.

**Korollar 4.11**

Der Edmonds-Karp-Algorithmus terminiert in $O(m^2 n)$ Schritten.

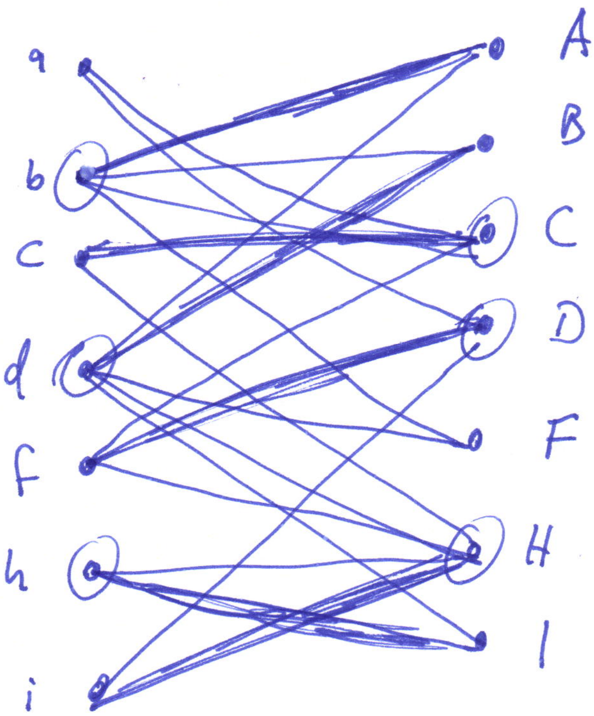
**Beweis:**

Jede Augmentierung kann mit BFS in $O(m)$ durchgeführt werden.

# Kapitel 5: Matching

## 5.1 Einstiegsbeispiel Kapitel 5 → Grundbegriffe

**Beispiel 5.1**



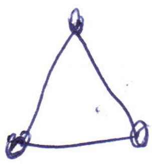

**Problem 5.2** (Maximales Matching)

**Problem 5.3** (Minimales Vertex Cover)

**Satz 5.4**

$$\max \text{Mat} \leq \min \text{VC}$$

**Beispiel 5.5**



i.A. $\max \text{Mat} < \min \text{VC}$