Problem „Maximaler Fluss" („Max Flow")

Gegeben: Netzwerk (G, u, s, t)

Gesucht: s-t-Fluss von maximalem Wert.

Formulierung als LP: Lineares Optimierungsproblem

$$\max F$$

mit
$$\sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e = F$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0 \quad \text{für } v \in V(G) \setminus \{s,t\}$$

$$0 \leq f_e \leq u_e$$

Lässt sich also mit Simplex o.ä. lösen.

Ziel hier: „Kombinatorische" Algorithmen, die intelligenter die Problemstruktur ausnutzen.

<u>Beobachtung 4.2</u> Es gibt immer eine optimale Lösung:

<u>Beweis:</u> (a) LP ist zulässig, da $f_e = 0$ für alle e zulässig ist.

(b) LP ist offensichtlich beschränkt.

Lemma 4.3 (Schranken durch Schnitte)

Für $A \subseteq V(G)$ mit $s \in A$, $t \notin A$ gilt für jeden st-Fluss f:

(a) $\text{Wert}(f) = \sum_{e \in \delta^+(A)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(A)} f(e)$

(b) $\text{Wert}(f) \leq \sum_{e \in \delta^+(A)} u(e)$

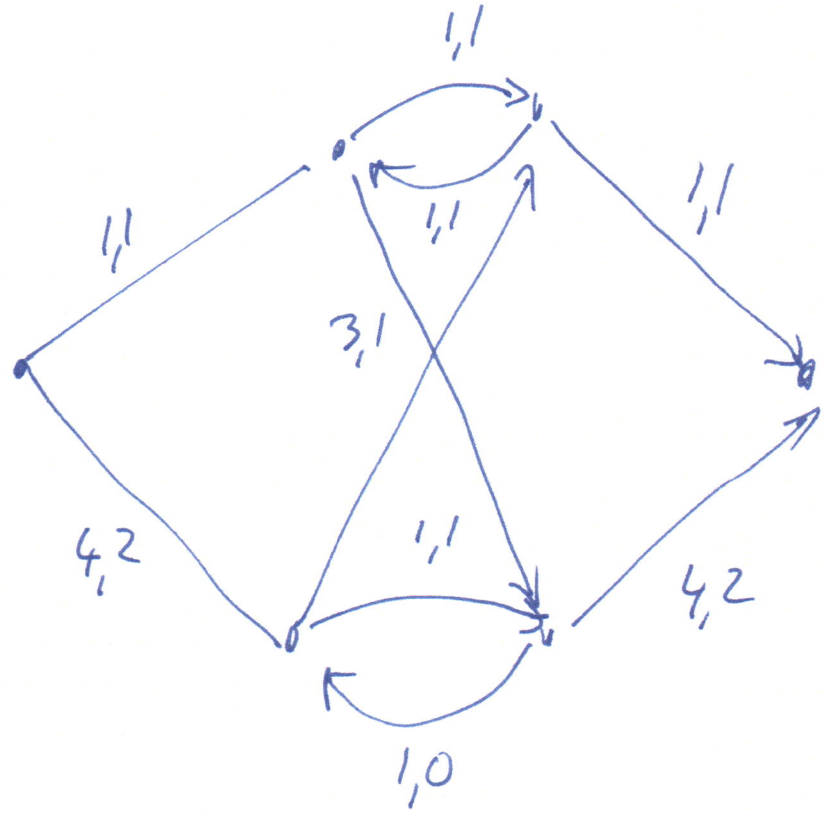
Beweis: (a) Da für alle $v \in A \setminus \{s\}$ Flusserhaltung gilt, ist

$$\text{Wert}(f) = \sum_{e \in \delta^+(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f(e)$$

$$= \sum_{v \in A} \left(\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) \right)$$

$$= \sum_{e \in \delta^+(A)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(A)} f(e) .$$

(b) Mit $0 \leq f(e) \leq u(e)$ ergibt sich das aus (a)


1,1
1,1
1,1
1,1
3,1
4,2
1,1
4,2
1,0

Grundkonzept für die folgenden Algorithmen:

Flüsse erhöhen oder erniedrigen!

Beispiel:

(siehe 53!

Interpretation: Fluss erniedrigen ist gleichbedeutend mit „Fluss in entgegengesetzte Richtung schicken".

Konsequenz dieser Idee:

Definition 4.4 (Residualgraph, augmentierende Pfade)

„Rest" „verbessernde"

(1) Für Digraph G ist

$$\overleftrightarrow{G} := \left(V(G),\ E(G) \,\dot{\cup}\, \{ \overleftarrow{e} \mid e \in E(G) \} \right)$$ mit

$\overleftarrow{e} = (w,v)$ für $e = (v,w)$ (die „Gegenkante" von e)

der doppelt gerichtete Graph zu G.

(2) Für einen Fluss f in einem Digraphen G mit Kapazitäten $u: E(G) \to \mathbb{R}_+$ definieren wir die

Residualkapazitäten $u_f : \begin{cases} u(e) - f(e) & \text{für } \cancel{e \in E(G)} \text{ Vorwärtskanten} \\ f(\overleftarrow{e}) & \text{für Rückwärtskanten} \end{cases}$

~~Interpretation~~

(3) Der Residualgraph G_f ist der Graph

$$\left(V(G),\ \{ e \in E(\overleftrightarrow{G}) \mid u_f(e) > 0 \} \right).$$

(4) Interpretation des Residualgraphen:

u_f auf Vorwärtskanten beschreibt, um wieviel man f noch erhöhen kann

u_f auf Rückwärtskanten beschreibt, um wieviel man f erniedrigen kann.

(5) Um für einen Fluss f und einen Pfad (oder Kreis) P in G_f den Fluss entlang P um γ zu augmentieren, muss man den Fluss für Vorwärtskanten um γ erhöhen, für Rückwärtskanten um γ reduzieren.

(6) Ein f-augmentierender Pfad in einem Netzwerk (G, u, s, t) mit einem Fluss f ist ein s-t-Pfad im Residualgraphen G_f.

Natürliche Konsequenz:

Algorithmus 4.5 (Ford-Fulkerson 1956)

Eingabe: Netzwerk (G, u, s, t)

Ausgabe: Ein s-t-Fluss von maximalem Wert

(1) Setze $f(e) = 0$ für alle $e \in E(G)$

(2) Finde einen f-augmentierenden Pfad P in G_f.
Falls keiner existiert: STOP

(3) Bestimme $\gamma := \min_{e \in E(P)} u_f(e)$

Erhöhe f entlang P um γ, GO TO (2)

Satz 4.6

Ein s-t-Fluss f ist optimal $\Leftrightarrow$ Es gibt keinen f-augmentierenden Pfad

Also stoppt der Algorithmus mit einem Optimalwert, wenn er stoppt.

(Wie wir noch sehen werden ist das „wenn" und „wann" u.U. etwas problematisch!)

Beweis:

„$\Rightarrow$" Wenn es einen augmentierenden Pfad gibt, wird von Algorithmus 4.5 in (3) ein besserer Fluss berechnet, also kann f nicht maximal sein.

„$\Leftarrow$" Wenn es keinen augmentierenden Pfad gibt, dann ist t in G_f nicht von s aus erreichbar.

Sei R die Menge der von s aus in G_f erreichbaren Knoten. Nach Definition von G_f ist also

für alle $e \in \delta_G^+(R)$: $f(e) = u(e)$

für alle $e \in \delta_G^-(R)$: $f(e) = 0$.

Also ist nach Lemma 4.3 (a)

$$\text{Wert}(f) = \sum_{e \in \delta^+(R)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(R)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(R)} u(e) .$$

Nach Lemma 4.3 (b) ist $\sum_{e \in \delta^+(R)} u(e)$ aber eine obere Schranke fürs Optimum, also f optimal.

$\square$

Interpretation:

Satz 4.7 (Max Flow - Min Cut)

In jedem Netzwerk ist der maximale Wert eines s-t-Flusses gleich der minimalen Kapazität eines s-t-Schnittes.

Historisch: ~~Ford und Fulkerson~~ Harris + Ross untersuchten 1955 einen minimalen Schnitt im selben sowjetischen Eisenbahnnetz, für das Tolstoi 1930 einen maximalen Fluss bestimmt hatte!