Maximales Matching?

Algorithmus 5.16

Wie Algorithmus 5.14;

Am Ende: Entferne $V(T)$ aus G.

~~falls~~ (Es gibt einen ungematchten Knoten)

CONTINUE mit Algorithmus 6.13

Satz 5.17

Algorithmus 5.16 bestimmt ein maximales Matching.

Beweis:

Angenommen, wir entfernen nacheinander die Bäume $T_1, \dots, T_k$. Dann sind in G am Ende nur die k Wurzeln ungematcht.

Entfernen aller schwarzen Knoten aus allen Bäumen hinterlässt für jeden Baum eine weiße ungerade Komponente mehr, also haben wir

$$oc(G \setminus S) = |S| + k$$

Da wir ein Matching der Größe $|S|$ haben, ist dieses optimal. $\square$

~~KOROLLAR~~ Bemerkung 5.18

Aus dem obigen kann man einen algorithmischen Beweis der Tutte-Berge-Formel ableiten.

Laufzeit:

Satz 5.19

Der Blossom-Algorithmus kann mit Laufzeit $O(n\, m \log n)$ implementiert werden.

Erläuterung:

Cook / Cunningham / Pulleyblank / Schrijver S. 141/42.

Satz 5.19

Algorithmus 5.18 terminiert nach (a) $O(n)$ Augmentierungen,
(b) $O(n^2)$ Schrumpfungen,
(c) $O(n^2)$ Baumerweiterungen.

Er entscheidet in korrekter Weise, ob G ein perfektes Matching hat.

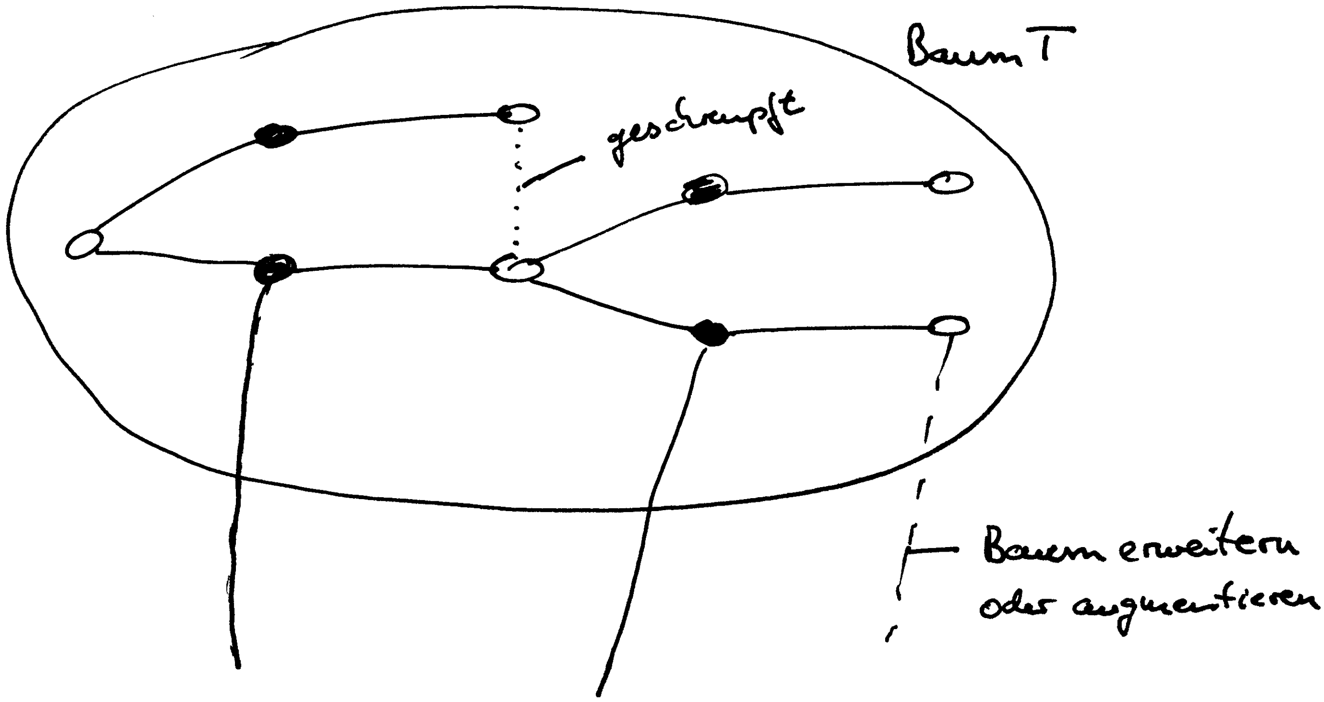
Beweis:

M' ist immer ein Matching; da jede Augmentierung die Zahl der ungematchten Knoten verringert, ist (a) klar.

Zwischen Augmentierungen verringert jede Schrumpfung die Zahl der Knoten in G', während jede Baumerweiterung die Zahl der Knoten nicht in $V(T)$ verringert. Also ist diese Zahl von Schritten zwischen Augmentierungen durch $O(n)$ begrenzt, was (b) und (c) impliziert.

Zur Korrektheit: Man kann zeigen, dass das Entfernen von $S(T)$ zusammen mit Satz 5.16 $oc(G \setminus S(T)) > S(T)$ liefert:

$\square$



Also: Entferne $S(T)$ aus G, dann entsteht pro Knoten in $W(T)$ eine ungerade Komponente.

$\Rightarrow |S(T)|$ entfernt, aber $|S(T)|+1 = |W(T)|$ ungerade Komponenten,

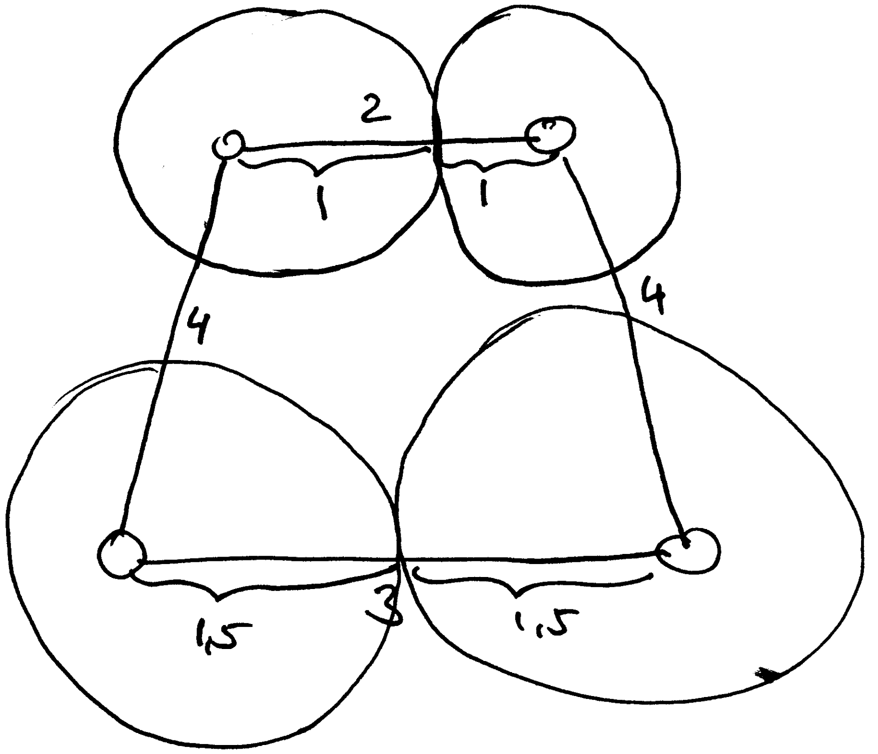
d.h. $\mathrm{oc}(G \setminus S(T)) > S(T)$.

$\Rightarrow$ es ex. kein perfektes Matching

$\square$

Geometrisch:

Kreise um Knoten, die mgl. groß sind (Radius y_v) und sich nicht schneiden ($y_u + y_v \le c_e$).



Mehr: Mathematische Methoden der Algorithmik $\longrightarrow$ WS