Das Simplex-Verfahren für $\begin{cases} \max c^T x \\ \text{st } Ax \leq b \end{cases}$ (vereinfacht)

(Phase I) Finde eine Ecke von P

(Ph. II) Wiederhole mit aktueller Ecke

(1) Wenn es einen Strahl a mit $a^T c > 0$ gibt
→ unbeschränkt, Ende

(2) Wenn es eine Kante a mit $a^T c > 0$ gibt
→ Folge ihr zu neuer Ecke

(3) Sonst: Optimale Lösung gefunden

Satz (Dantzig 1947): Algo ist korrekt

Aber leider:

Satz (Klee-Minty 1972): Es gibt Probleminstanzen, auf denen Simplex exponentielle Laufzeit haben kann.

Zu Phase I:

Ang. wir lösen (LP) $\begin{cases} \max c^T x \\ \text{st. } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ und es gilt $b \geq 0$

statt dessen lösen wir:

$$(LP') \begin{cases} \min \mathbb{1}^T s \\ \text{s.t. } Ax + Is = b \\ x \geq 0, s \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

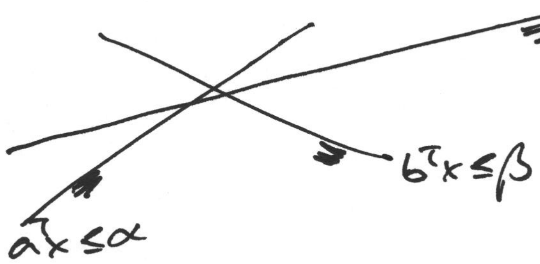
Beobachtung

Einfach ratbare Lösung für LP': $x=0, s=b$.
Ist auch eine Ecke von LP'.

Optimale Lsg von LP' hat $s=0$, das x ist dann zulässig für LP.

$\Rightarrow$ Löse mit Simplex

Dualität

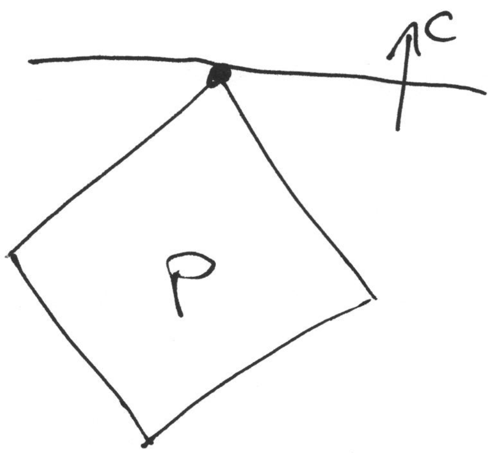


$(\lambda a + \mu b)^T x \le (\lambda \alpha + \mu \beta)$

$(\lambda, \mu \geq 0)$

$$\hat{=} \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}^T \left(\boxed{\begin{matrix} a^T \\ b^T \end{matrix}}\right) x \le \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Jedes $(u^TA)x \le (u^Tb)$ ist eine gültige Ugl für P
$(u \geq 0)$



Konstruiere ein u so dass $u^TA = c^T \Rightarrow$ obere Schranke.

Bestmögliche Schranke: $\min u^Tb$

Zusammen das „duale LP":
$$\begin{cases} \min & u^Tb \\ \text{s.t.} & u^TA = c^T \\ & u \geq 0 \end{cases}$$

Satz (Schwache Dualität): (P) $\leq$ (D), dh. jede Lsg von (P) hat kleineren/gleichen Wert wie kleinste Lsg von (D).

Satz (Starke Dualität): Es gilt genau eines von

(1) $P = \emptyset$, $D =$ unbeschränkt

(2) $P =$ unbeschränkt, $D = \emptyset$

(3) $opt(P) = opt(D)$.

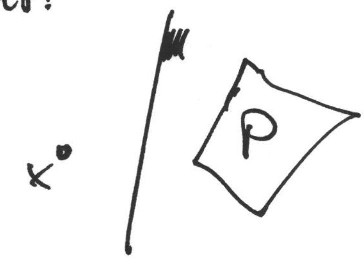
Beziehungen P — D (wenn P ~~M~~ Maximierungsproblem)

Primal	Dual
$\leq$-Ugl	≥ 0-Variable
$\geq$-Ugl	≤ 0-Variable
Gleichung	freie Variable
≥ 0-Var	$\leq$-Ugl
≤ 0-Var	$\geq$-Ugl
freie Var	Gleichung

Die Ellipsoidmethode

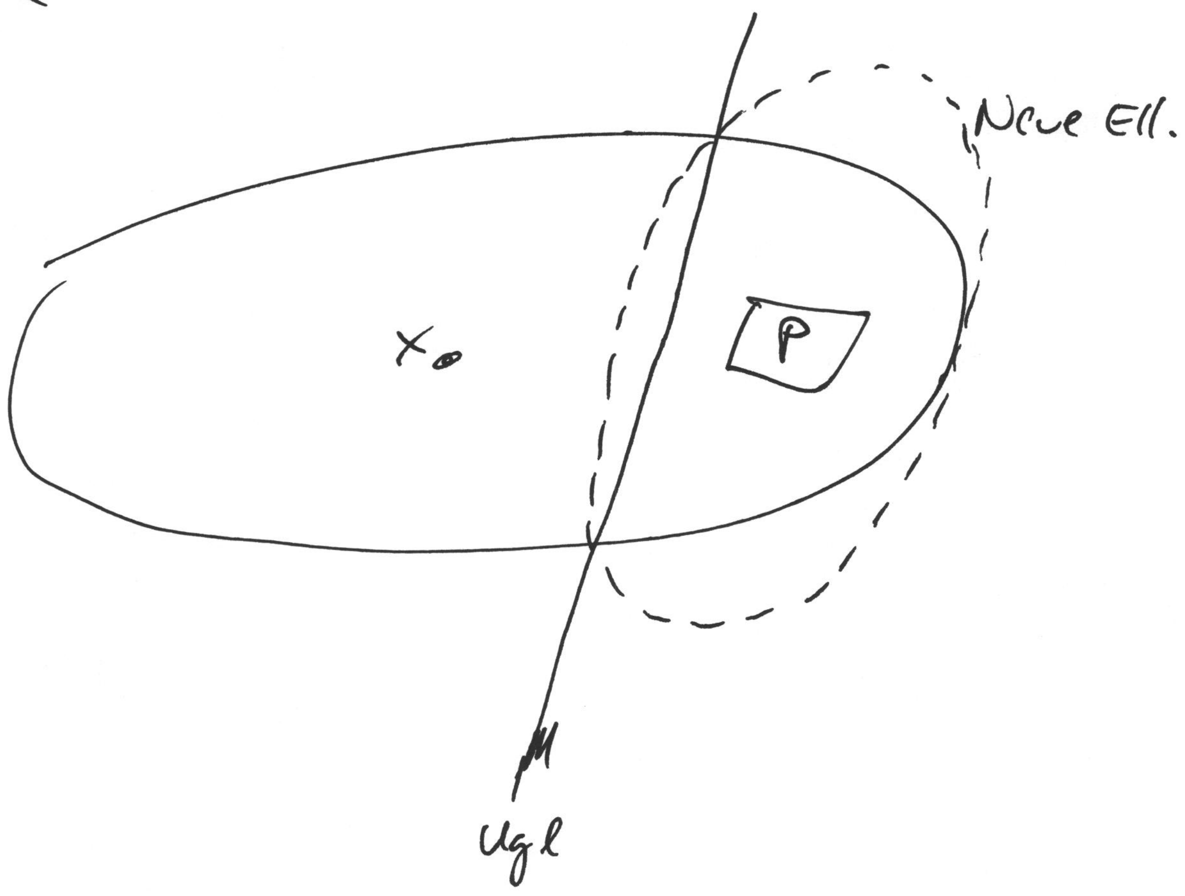
verwendet „Separationsorakel“:

gegeben ein Punkt, das S.O. prüft, ob der Punkt in P liegt. Wenn nicht, belegt es das durch Vorlage einer Ugl, die gültig für P ist, aber nicht für den Punkt:



Die Ell. Methode arbeitet mit einem Ellipsoid, das ~~[illegible]~~ P enthält. Danach iteriert:

- Frage SO nach dem Mittelpunkt der Ellipse
- Falls $\in P \Rightarrow$ Fertig
- Sonst: konstruiere kleinere Ellipse und wdh.



Satz: Die Ell.M findet einen Punkt in P und fragt dafür nur polynomiell oft das S.O.

$\Rightarrow$ „Finde Punkt in P" ist polynomiell lösbar.

Aber

$$(P)\begin{cases}\max c^Tx\\ \text{s.t. } Ax\leq b\end{cases} \quad = \quad (D)\begin{cases}\min u^Tb\\ \text{s.t. } u^TA=c^T\\ \quad u\geq 0\end{cases}$$

Wenn man also einen Punkt hierdrin findet

$$\begin{cases}c^Tx=u^Tb\\ Ax\leq b\\ u^TA=c^T\\ u\geq 0\end{cases}$$

hat man (P) optimal gelöst. Also kann die Ell.Methode LPs in polynomieller Zeit lösen.

<u>In der Praxis</u>

- Ell.M. ist praktisch nicht implementierbar
- Simplex ist schnell. <u>Sehr</u> schnell.
- Man kann den Simplex erweitern („Primal-Dualer Simplex") so, dass er Separationsungleichungen schnell berücksichtigen kann, ohne neustarten zu müssen.

Anwendungsbeispiel Dualität & Separation: Max-Flow

$\mathcal{P}$ = die Menge aller Pfade von s nach t in einem Graphen (die evtl. Zusatzbedingungen erfüllen)

Max-Flow als LP:

$$(P)\begin{cases} \max \sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \overset{\text{Fluss auf P}}{x_p} \\ \text{s.t.} \sum\limits_{P: e\in P} x_p \le \overset{\text{Kapazität}}{u_e} \quad \forall e\in E \\ \quad x_p \geq 0 \end{cases}$$

exponentiell viele Variablen – so nicht lösbar.
Stattdessen das Duale

$$(D)\begin{cases} \min \sum\limits_{e\in E} u_e y_e \\ \text{s.t.} \sum\limits_{e\in P} y_e \geq 1 \quad \forall p\in\mathcal{P} \quad \circledast \\ \quad y\geq 0 \end{cases}$$

Das Separationsproblem bei gegebenem y lautet „gibt es ein $P\in\mathcal{P}$ mit $\sum\limits_{e\in P} y_e < 1$?". Das lässt sich mit einem kürzeste-Wege-Algorithmus (mit y als Kantengewichten) schnell lösen. Also kann man auch (P) schnell lösen!