Äquivalenz der Standardformen

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{cases} \qquad \begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Ungleichungsarten:

$$a^T x \leq \alpha \rightsquigarrow \begin{cases} a^T x + 1 \cdot s = \alpha \\ \alpha \geq 0 \end{cases}$$ „Schlupfvariable"

$$a^T x = \alpha \rightsquigarrow \begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ (-a)^T x \leq -\alpha \end{cases}$$

$$a^T x \geq \alpha \Longleftrightarrow (-a)^T x \leq (-\alpha)$$

Variablenarten:

x frei (also ohne Vorzeichenbeschränkung)

$\rightarrow$ neue Vars x^+, x^- mit $x := x^+ - x^-$, $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$

Alle Terme ändern:

$$\cdots + A_{ji} x_i + \cdots$$

$$\rightsquigarrow \cdots + A_{ji} x_i^+ - A_{ji} x_i^- + \cdots$$

~~Kurzversion / Polyedertheorie~~

(„Wie sieht $Ax \leq b$ aus?")

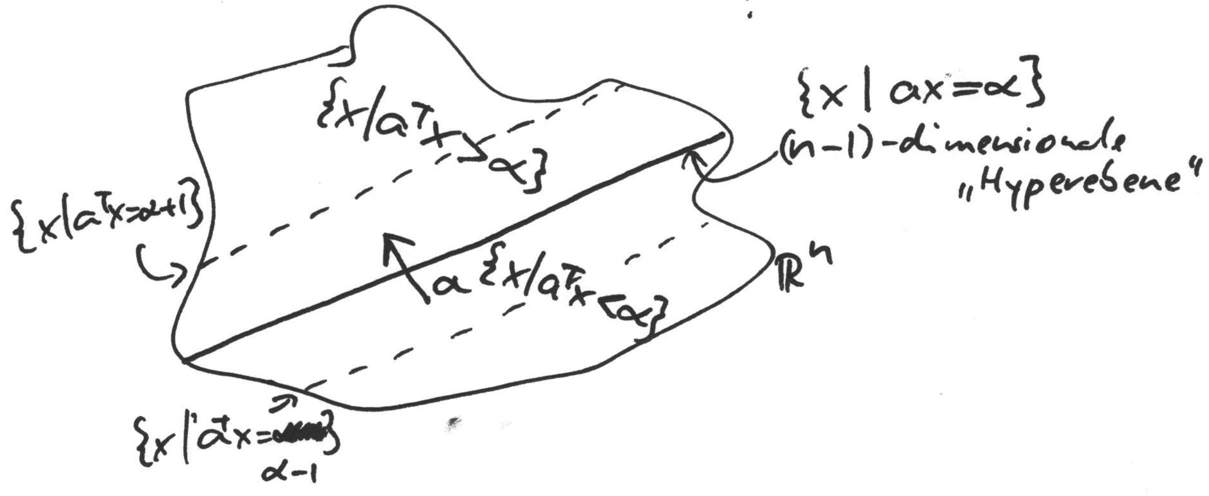
1 Ungleichung: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ax \leq \alpha\}$

$\geq$

$=$

$<$

$>$ ...



Begriffe: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$ „Halbraum"

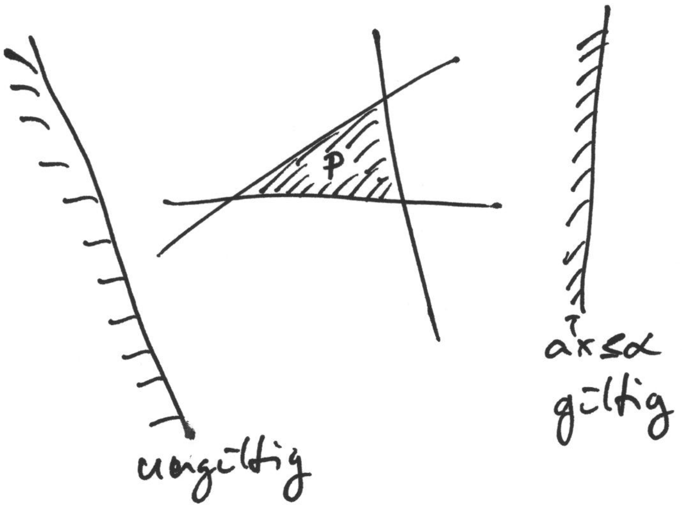
$\{\quad$ –''– $\quad = \alpha\}$ „Hyperebene"

Jetzt Matrix

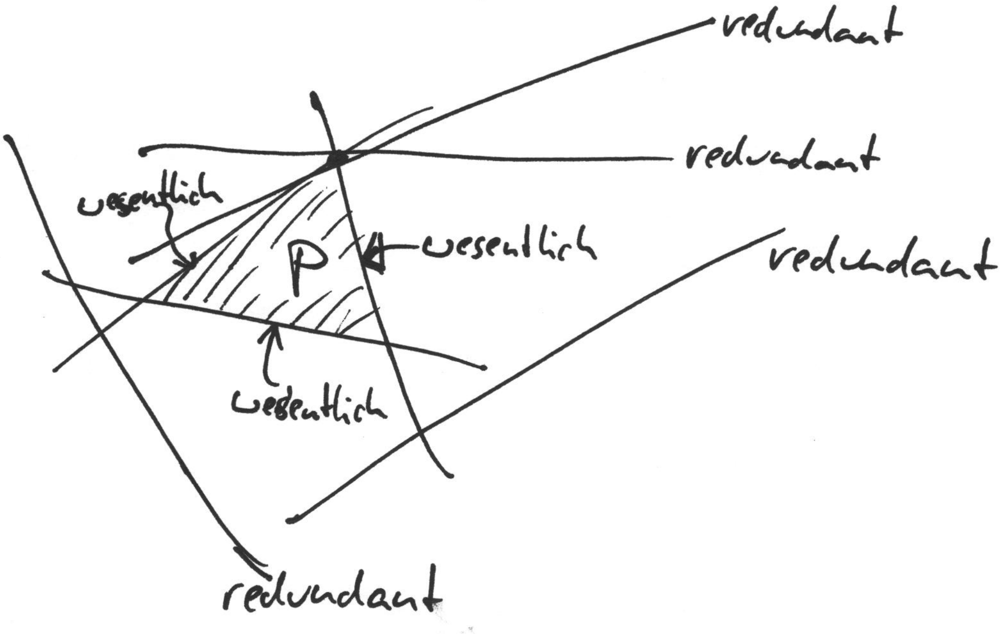
$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} m \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ heisst „Polyeder" bzw. „konvexes Polyeder". Wenn beschränkt: „Polytop".

Eine Ungleichung $a^T x \le \alpha$ ist „gültig" für P, wenn $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \le \alpha\}$



Eine Ungleichung $A_{i\cdot} x \le b_i$ heisst redundant für P, wenn P durch Weglassen nicht verändert wird



$\Rightarrow$ Es gibt eine minimale Darstellung von P, bestehend aus

(1) linear unabhängigen Gleichheitsrestriktionen,

(2) wesentlichen Ungleichungen.

(Diese ist aber oft nicht bekannt...)

Eine gültige Ungleichung für P

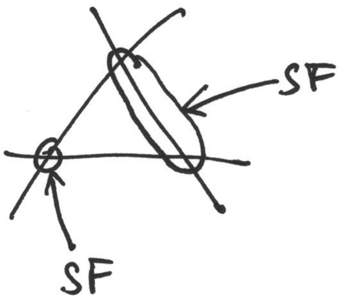
$$a^T x \leq \alpha$$

definiert eine <u>Seitenfläche</u> von P:

$$\{x \in P \mid a^T x = \alpha\}$$

↑!!!

Bsp



Beobachte: SF eines Polyeders ist ein Polyeder.

Man kann eine Hierarchie nach dimension aufbauen:

P ← dim P

← dim P−1 „Facette" (facet)

← dim P−2 „Grate"

← dim = 1 „Kante" (edge)

← dim = 0 „Ecke" (vertex)

∅ ← dim = −∞

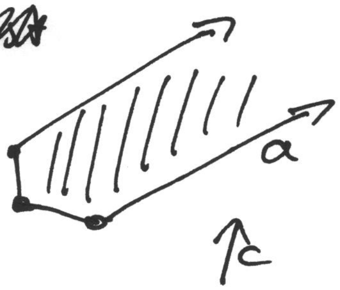
Eigenschaft: Wenn ein Polyeder eine Ecke hat, bilden die Ecken & Kanten einen zusammenhängenden Graphen.

Eigenschaft: Die minimale Darstellung besteht aus den Facetten-induzierenden Ugls und linear unabhängigen Gleichheitsrestriktionen.

Wie sieht die Lösungsmenge eines LPs aus?

(1) $P=\emptyset$: klar

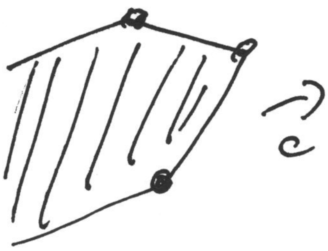
(2)



Es gibt Strahl a mit $a^Tc > 0$

$\Rightarrow$ unbeschränkt

(3)



Es gibt keinen Strahl

$\Rightarrow$ beschränkt und es gibt eine optimale Ecke.