Kapitel 1: Kombinatorische Optimierung, LP, MIP, IP

Probleme der K.O. haben typischerweise die Form

| Maximiere/Minimiere Kosten/Nutzen/Profit/...
| Unter Nebenbedingungen

Konkreter:

$$\begin{array}{ll} \max/\min & c(x) \quad \text{„Zielfunktion"} \\ \text{s.t.} & x \in X \quad \text{Menge der „zulässigen" Lösungen} \end{array}$$

In diesem Kapitel: Lineare Programme, also Probleme, bei denen c linear ist und X eine Beschreibung mit linearen Constraints hat (und evtl Ganzzahligkeitsbedingungen)

Also

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$c(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} Ax \leq b \\ A'x = b' \\ A''x \geq b'' \\ x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I \subseteq \{1, \dots, n\} \end{array} \}.$$

Standardformen:

(1) $\left|\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{st} & Ax \leq b \end{array}\right.$

(2) $\left|\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{st} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}\right.$

(sind ineinander überführbar)

Für ganzzahligkeit:

$x_i \in \mathbb{R}$	„fraktionale Variable"	
$x_i \in \mathbb{Z}$	„ganzz. Var."	$(\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\})$
$x_i \in \mathbb{B}$	„binäre Var."	$(\mathbb{B} = \{0, 1\})$

Typen:

„LP" = „Linear Program" = alle $x_i \in \mathbb{R}$

„IP" oder „ILP" = „Integer Linear Program" = alle $x_i \in \mathbb{Z} / \mathbb{B}$

„MIP" oder „MILP" = „Mixed-Integer Linear Program"
(gemischte Variablentypen)

1.1 Modellierung und Beispiele

Das Standardbeispiel: Die Ölraffinerie

Rein: Öl

Raus: Schweröl „S", Mittelschweres Öl „M", Leichtöl „L"

Zwei Produktionsprozesse:

(1) produziert 2 S, 2 M, 1 L für 3€

(2) –"– 1 S, 2 M, 4 L für 5€

Auftrag: Produziere 3 S + 5 M + 4 L so preiswert wie möglich.

Variablen: x_1, x_2 für (1), (2)

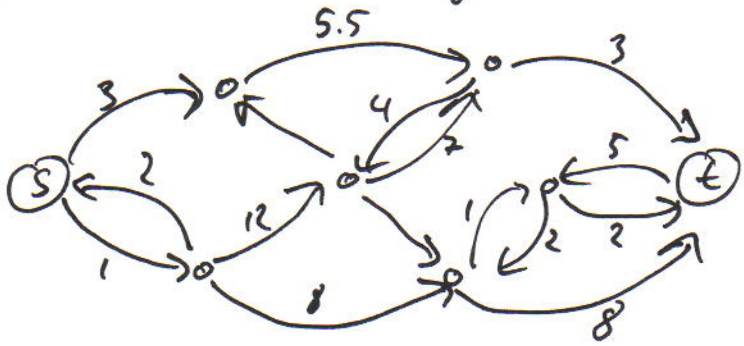
$$\rightarrow \begin{cases} \min & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{st} & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Oder:

$$\begin{cases} \min & \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}^T x \\ \text{st} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Bsp: MAX FLOW

Gegeben Digraph (V,E) mit „Quelle" s und „Senke" t,
Kapazitäten u_e $(e \in E)$.
Transportiere so viel wie möglich von s nach t



Anwendungen Transport, Kommunikationsnetze

$$\begin{cases} \max \sum_{e \in \delta^+(s)} x_e \\ \text{s.t.} \quad \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = 0 \quad \forall v \neq s,t \quad \text{„Flow conservation"} \\ \quad 0 \leq x_e \leq u_e \quad \forall e \quad \text{„Capacity constraints"} \end{cases}$$

$\delta(v)$	Alle zu v inzidenten Kanten
$\delta^+(v)$	Alle von v ausgehenden K.
$\delta^-(v)$	Alle zu v eingehenden K.

Verwandt:

MINCOSTFLOW
$$\begin{cases} \min \sum_{e \in E} \underbrace{c_e}_{\text{Kosten}} x_e \\ \text{s.t.} \sum_{e \in \delta^+(s)} x_e = \underbrace{b}_{\text{Bedarf}} \\ \text{Flow Cons.} \\ \text{Capacities} \end{cases}$$

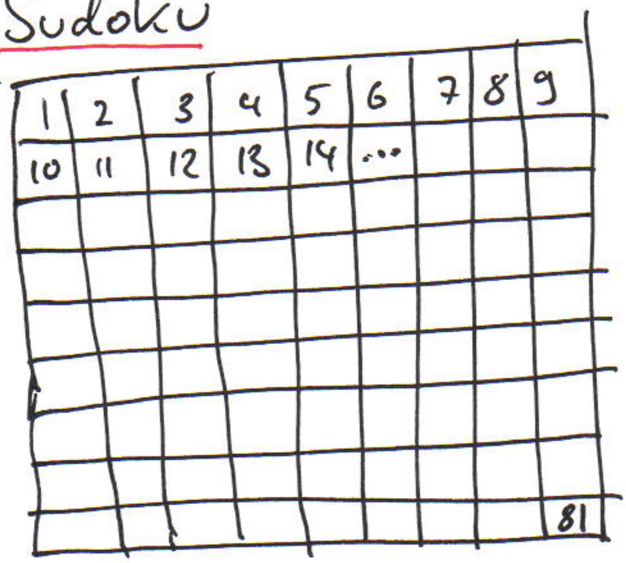
Verwandt:

TRANSPORTATION

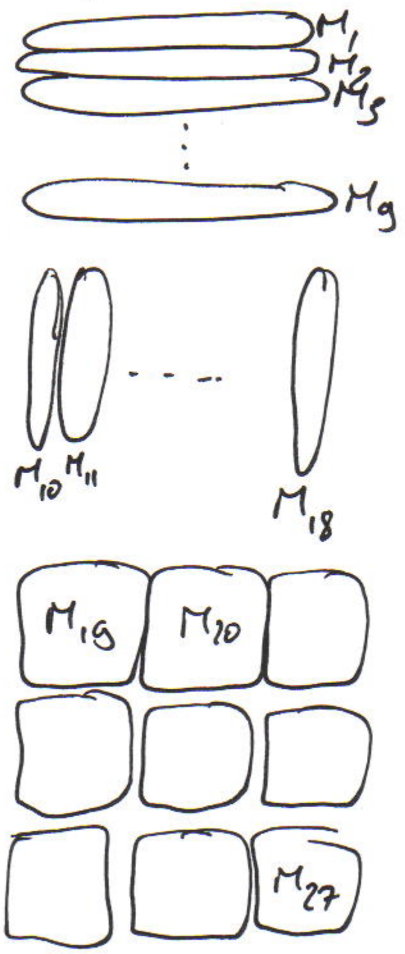
$$\begin{cases} \min \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.t.} \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = b_v \quad \forall v \\ \text{Capacity Cons.} \end{cases}$$

b_v: Excess/Demand

Bsp: Sudoku



Mengen m. Feldern $M_1 \dots M_{27}$



Einige Vorgegeben:

$F \subseteq \{1, \dots, 81\}$

in $f \in F$ muss z_f stehen.

Variablen $x_{i,j} \in \mathbb{B}$ $(i \in \{1, \dots, 9\},\ j \in \{1, \dots, 81\})$ ⑥

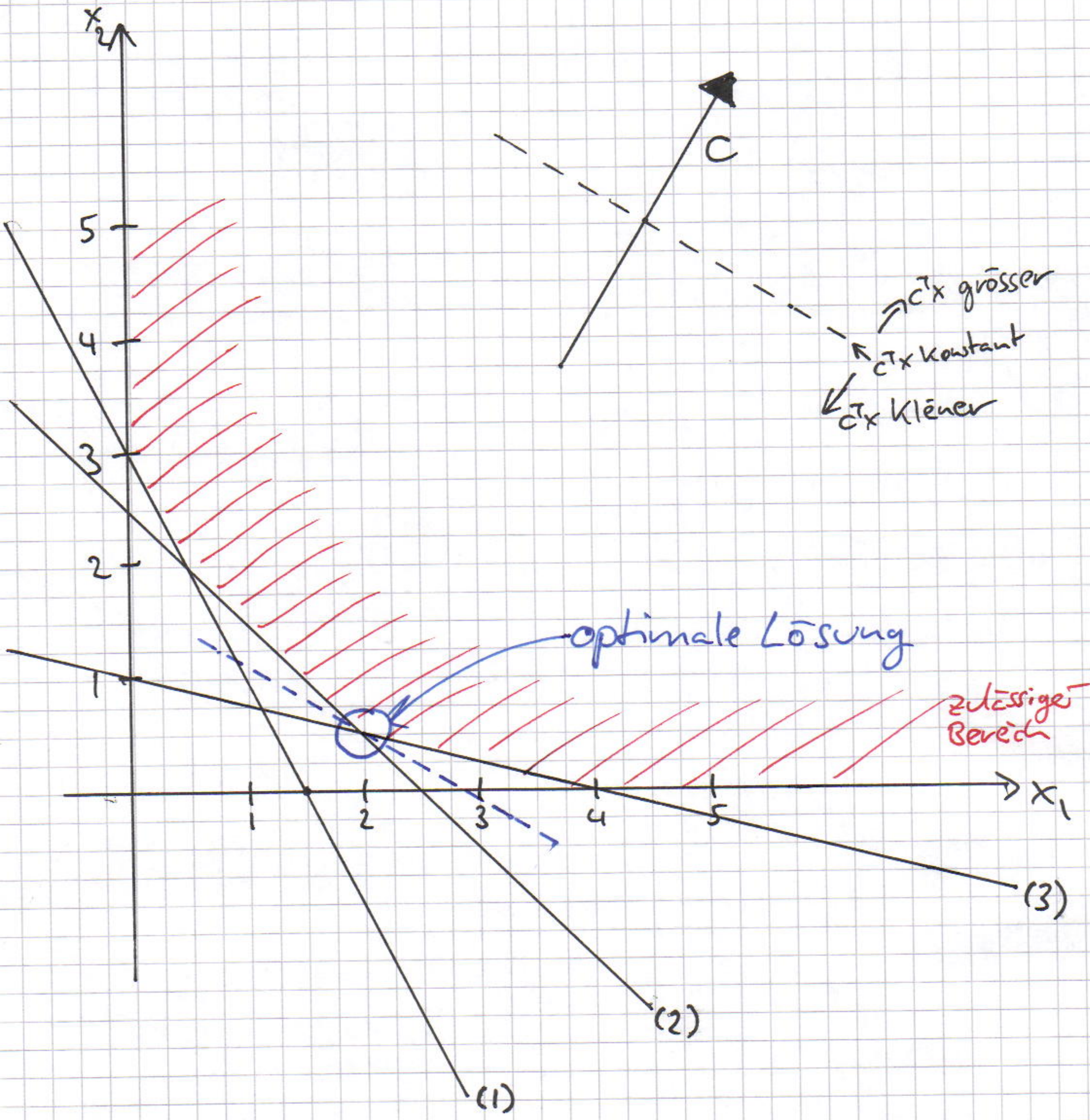
$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\max & 0 & \\
\text{st} & \displaystyle\sum_{j \in M_k} x_{ij} = 1 & \forall k = 1, \dots, 27;\ \forall i = 1, \dots, 9 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{9} x_{ij} = 1 & \forall j = 1, \dots, 27 \\
& x_{i,j} \in \mathbb{B} & \forall j \in \{1, \dots, 81\} \setminus F,\ \forall i = 1, \dots, 9 \\
& x_{ij} = 0 & \forall j \in F,\ \forall i \in \{1, \dots, 9\} \setminus \{z_j\} \\
& x_{z_j,j} = 1 & \forall j \in F.
\end{array}
\right.
$$

1.2 LPs

Wie sehen die Lösungsmengen von LPs aus?

Wdh Ölraffinerie

$$\begin{array}{llr}
\min & 3x_1 + 5x_2 & (c) \\
\text{st} & 2x_1 + x_2 \geq 3 & (1) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \geq 5 & (2) \\
 & x_1 + 4x_2 \geq 4 & (3) \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}$$


x_2
x_1
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
c
$c^T x$ grösser
$c^T x$ konstant
$c^T x$ kleiner
optimale Lösung
zulässiger Bereich
(1)
(2)
(3)