Übung 20.4.09 ①

Folgendes Problem ist gegeben:

Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch Importbeschränkungen werden seine monatlichen Einkaufsmengen folgendermaßen begrenzt:

| | |
|---|---|
| *Sir Roses* | höchstens 2000 Flaschen zu 35 EUR, |
| *Highland Wind* | höchstens 2500 Flaschen zu 25 EUR, |
| *Old Frenzy* | höchstens 1200 Flaschen zu 20 EUR. |

Daraus stellt er drei Mischungen A, B und C her, die er zu 34 EUR, 28.50 EUR, bzw. 22.50 EUR pro Flasche verkauft. Die Zusammensetzung der Mischungen ist:

| | |
|---|---|
| A | wenigstens 60% *Sir Roses* |
| | höchstens 20% *Old Frenzy* |
| B | wenigstens 15% *Sir Roses* |
| | höchstens 60% *Old Frenzy* |
| C | höchstens 50% *Old Frenzy* |

Wie sollten die Mischungen aussehen und wieviel sollte von jeder Mischung hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Formuliere dieses Problem als lineares Programm. (Das Problem muss *nicht* gelöst werden!)

Modellierung als LP mit Variablen

SR wieviel Sir Roses wird gekauft

HW —"— H. Wind —"—

OF —"— Old Frenzy —"—

SR_A wieviel Sir Roses wird für die Produktion von A verwendet

analog:

SR_B SR_C

HW_A HW_B HW_C

OF_A OF_B OF_C

Als LP:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 34(\text{SR\_A} + \text{HU\_A} + \text{OF\_A}) \\
& + 28.5(\text{SR\_B} + \text{HU\_B} + \text{OF\_B}) \\
& + 22.5(\text{SR\_C} + \text{HU\_C} + \text{OF\_C})
\end{aligned}
$$

s.t.

$$\text{SR\_A} \geq .6(\text{SR\_A} + \text{HU\_A} + \text{OF\_A})$$
$$\text{OF\_A} \leq .2(\text{SR\_A} + \text{HU\_A} + \text{OF\_A})$$

$$\text{SR\_B} \geq .15(\text{SR\_B} + \text{HU\_B} + \text{OF\_B})$$
$$\text{OF\_B} \leq .6(\text{SR\_B} + \text{HU\_B} + \text{OF\_B})$$

$$\text{OF\_C} \leq .5(\text{SR\_C} + \text{HU\_C} + \text{OF\_C})$$

$$\text{SR} = \text{SR\_A} + \text{SR\_B} + \text{SR\_C}$$
$$\text{HU} = \text{HU\_A} + \text{HU\_B} + \text{HU\_C}$$
$$\text{OF} = \text{OF\_A} + \text{OF\_B} + \text{OF\_C}$$

$$\text{SR} \leq 2000$$
$$\text{HU} \leq 2500$$
$$\text{OF} \leq 1200$$

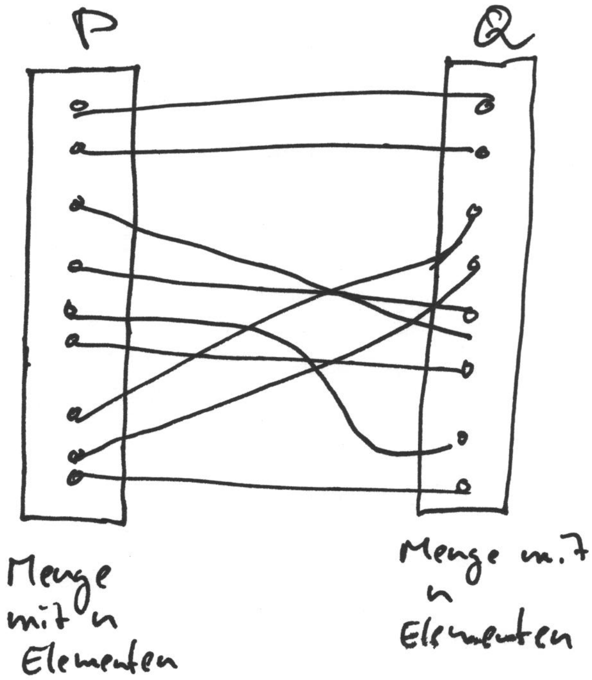
Alle Var. $\geq 0$.

③

Im „.lp"-Format zum Lösen mit CPLEX oder SoPlex (o. SCIP)

```
Maximize
  -35 SR - 25 HW - 20 OF + 34 SR_A + 34 HW_A + 34 OF_A + 28.5 SR_B + 28.5
HW_B + 28.5 OF_B + 22.5 SR_C + 22.5 HW_C + 22.5 OF_C
Subject To
 .4 SR_A - .6 HW_A - .6 OF_A >= 0
 -.2 SR_A - .2 HW_A + .8 OF_A <= 0
 .85 SR_B - .15 HW_B -.15 OF_B >= 0
 -.6 SR_B - .6 HW_B + .4 OF_B <= 0
 -.5 SR_C - .5 HW_C + .5 OF_C <= 0
 SR_A + SR_B + SR_C - SR = 0
 HW_A + HW_B + HW_C - HW = 0
 OF_A + OF_B + OF_C - OF = 0
Bounds
 0 <= SR <= 2000
 0 <= HW <= 2500
 0 <= OF <= 1200
 SR_A >= 0
 SR_B >= 0
 SR_C >= 0
 HW_A >= 0
 HW_B >= 0
 HW_C >= 0
 OF_A >= 0
 OF_B >= 0
 OF_C >= 0
End
```

# Das „bipartite Max-Perfect-Matching"-Problem: (a.k.a. Heiratsproblem)




Zu jedem $(i,j)$ sagt $c_{ij}$, wie gut $i$ und $j$ zusammenpassen.

zB P Männer, Q Frauen, $c_{ij}$ „Glücklichkeitsindex" einer Heirat

P Jobs, Q Maschinen, $c_{ij}$ wie gut Job $i$ auf $j$ läuft

P Mitarbeiter, Q Jobs, $c_{ij}$ Qualifikation von $i$ für $j$

usw...

Gesucht: Zuordnung $P$ zu $Q$ (also jedes $i \in P$ ist genau einem $j \in Q$ zugeordnet, und umgekehrt), das die Summe der $c_{ij}$ der Paarungen maximiert:

Als IP:

$$
\begin{cases}
\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, \dots, n \\
\qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1, \dots, n \\
\qquad x_{ij} \in \mathbb{B} \quad \forall i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, n
\end{cases}
$$

Vorgriff: In diesem IP kann man „$x_{ij} \in \mathbb{B}$" durch „$0 \leq x_{ij} \leq 1$, $x_{ij} \in \mathbb{R}$" ersetzen, ~~dann~~ und bekommt trotzdem ganzzahlige Lösungen.

# Modellierungstricks

Logik: $x_1, \dots, x_k$ und $y_1, \dots, y_k$ Binärvariablen, die modellieren, ob eine bestimmte Entscheidung getroffen wird oder nicht.

„$x_1$ darf nur gewählt werden, wenn auch $y_1$ gewählt wird" $\longrightarrow$ $x_1 \leq y_1$

„$x_1$ darf nur gewählt werden, wenn eine o. mehr von $y_1, \dots, y_k$ gewählt wird"

$$\longrightarrow \quad x_1 \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

„$x_1$ darf nur gewählt werden, wenn <u>alle</u> von $y_1, \dots, y_k$ gewählt werden"

$$\longrightarrow \quad k \cdot x_1 \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

„Es darf nur max 1 der $x_1, \dots, x_k$ gewählt werden" $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq 1$

„Man muss sich für genau eines der $x_1, \dots, x_k$ entscheiden" $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$

# Min-Max

Wenn das Problem lautet
„Minimiere das schlechtmöglichste ...", also
min $\max\{c^T x, d^T x, e^T x, \ldots\}$ und c, d, e jeweils
„Zielfunktionen" sind:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z \\
\text{s.t.} \quad & c^T x \leq z \\
& d^T x \leq z \\
& e^T x \leq z \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
$$