Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 09**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Approximationsalgorithmen
Übung 1 vom 09.04.2009

Abgabe der Lösungen am Dienstag, den 21.04.09, bis 13:00 Uhr in der Abteilung *Algorithmik* (IZ 262).
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Das Traveling-Salesman-Problem):
Wir betrachten die allgemeine — nicht die geometrische — Version des Traveling-Salesman-Problem aus der Übung. Zeige:

(a) Zeige, dass das TSP nicht konstant approximierbar ist, d.h., es keinen Algorithmus mit konstanter Approximationsgte δ gibt (außer $P = NP$).

Für diesen Beweis kann man das Hamiltonkreis-Problem (HKP) verwenden. Dieses hat als Input einen Graphen G (nicht notwendigerweise vollständig) mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Die Frage, die es zu entscheiden gilt lautet: Gibt es einen Kreis in G, der jeden Knoten genau einmal besucht.

Für den obigen Beweis betrachten wir eine beliebige Instanz des HKP und setzen $c_e = 1$ falls $e \in E$ und $c_e = n(\delta + 1)$ falls $e \notin E$. Damit haben wir eine Instanz des TSPs. Angenommen, es gäbe einen δ-Approximationsalgorithmus ALG für das TSP. Sei $|ALG|$ der Wert von ALG. Folgere, dass man mit diesem Alorithmus das HKP entscheiden könnte. (Tipp: Es gilt entweder $|ALG| \leq \delta n$ oder $|ALG| > \delta n$.)

(b) Betrachte folgenden Greedy-Algorithmus für das TSP: Sei S die Menge der bereits besuchten Knoten (zu Beginn $S := \emptyset$). Starte mit einem beliebigen Knoten $v \in V$. Füge v zu S hinzu und wähle eine Kante $e = \{v, w\}$ mit minimalem Gewicht, wobei $w \in V \setminus S$ gelten muss. Fahre mit w fort. Wenn $S = V$ ist, kehre zum Startknoten zurück.

Gib ein Beispiel an, bei dem der Algorithmus im Verhältnis zum Optimum beliebig schlecht werden kann.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Vertex Cover):
Wir betrachten zwei Greedy-Algorithmen für das Vertex-Cover-Problem in einem Graphen $G = (V, E)$:

Greedy 1:
$C := \emptyset$
while $E \neq \emptyset$ **do**
  Wähle eine Kante $e \in E$ und wähle einen Knoten v von e.
  $C := C \cup \{v\}$
  $E := E \setminus \{e \in E : v \in e\}$
end
return C

Greedy 2:
$C := \emptyset$
while $E \neq \emptyset$ **do**
  Wähle einen Knoten mit maximalen Grad im *aktuellen* Graphen.
  $C := C \cup \{v\}$
  $E := E \setminus \{e \in E : v \in e\}$
end
return C

Zeige, das für beide Algorithmen schon für bipartite Graphen keine konstante Approximationsgüte garantiert werden kann.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Laufzeit):

(a) Welche Inputkomplexität haben die Problem TSP, Hamiltonkreis und Vertex Cover?

(b) Welche Laufzeit haben die in Aufgabe 1 und Aufgabe 2 vorgestellten Algorithmen?

(c) Beschreibe mit eigenen Worten, was du unter den Komplexitätsklassen P und NP verstehst. Was bedeutet NP-vollständig?

(6+6+8 Punkte)