Falls $x_{m-1} + x_m > 1$, betrachte

$$\varepsilon := x_m \leq \tfrac{1}{2}.$$

Für $i \leq m-1$ haben wir $x_i \geq x_{m-1} > 1 - x_m = 1-\varepsilon$,

also

$$u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) = u^{(2)}(1) = 1 \, ;$$

wegen $\frac{1}{3} < x_m \leq \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_m) = u^{(2)}(x_m) = \frac{1}{2}$$

Also

$$L_2^{(2)}(I) \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{m} u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) \right\rceil = \left\lceil (m-1) + \frac{1}{2} \right\rceil = m.$$

Betrachte also

$$\boxed{x_{m-1} + x_m \leq 1}$$

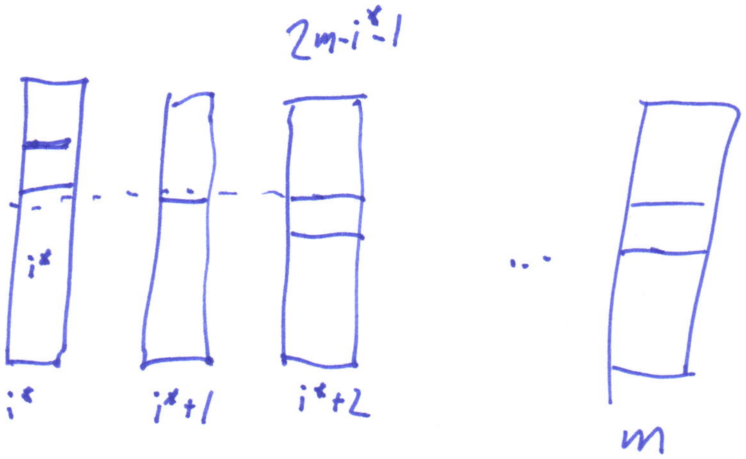
Angenommen. Für $i^* \in \{2m-n, \dots, n\}$ gilt

$$x_i + x_{2m-i-1} \leq 1, \qquad \text{(Bild)}$$

dann können wir alle ~~kleinen~~ Objekte zwei Bins nach links schieben und x_{m-1} mit x_n zusammenpacken, was ein Bin spart.

Also gibt es ein $i^* \in \{2m-n, \dots, n\}$ mit

$$\boxed{x_{i^*} + x_{2m-i^*-1} > 1}$$



Betrachte also $\varepsilon := x_{2m-i^*-1}$.

Also für $i \in \{1, \dots, i^*\}$

$$x_i \ge x_{i^*} > 1 - \varepsilon,$$

d.h. $u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) = u^{(2)}(1) = 1$

Für $i \in \{i^*+1, \dots, 2m-1-i^*\}$ gilt

$$x_i \ge 2_{m-i^*-1} = \varepsilon,$$

d.h. $u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) \ge u^{(2)}(x_i) \ge \frac{1}{2}$.

Zusammen

$$L_2^{(2)}(I) \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{i^*} u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) + \sum_{i=i^*+1}^{2m-i^*-1} u^{(2)} \circ U^{(\varepsilon)}(x_i) \right\rceil$$

$$\geq \left\lceil \sum_{i=1}^{i^*} 1 + \sum_{i=i^*+1}^{2m-i^*-1} \frac{1}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lceil i^* + \frac{(2m-2i^*-1)}{2} \right\rceil = m \, .$$

$\square$

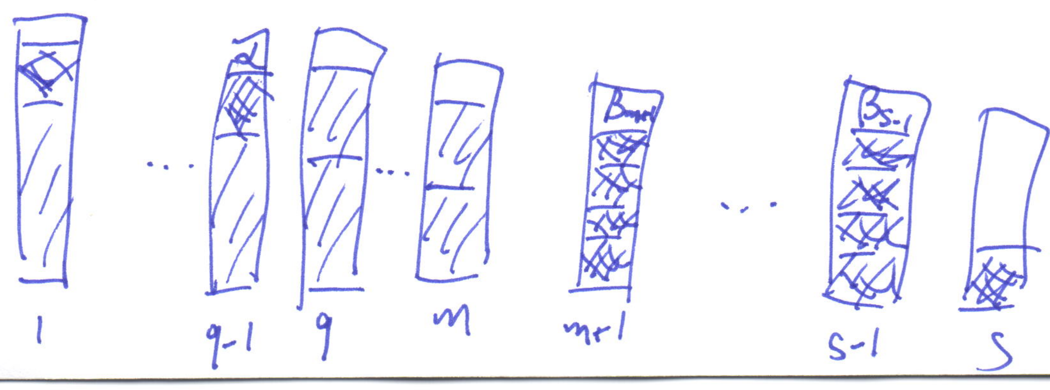
7.7.08

Satz 6

$$\max\left\{ L_2(I) \, , \, L_2^{(2)}(I) \right\} \geq \frac{3}{4} OPT(I) - 1$$

Beweis:

Nach Satz 5 passen alle Objekte mit $x_i > \frac{1}{3}$ in $m \leq L_2^{(2)}(I)$ Bins.



Füge die restlichen Objekte ~~dazu~~ mit FFD dazu – siehe Bild. Das ergibt eine Lösung mit s Bins.

Wenn $s \leq \frac{4}{3} m$, dann ist

$$OPT(I) \leq s \leq \frac{4}{3} m \leq \frac{4}{3} \{ L_2^{(2)}(I), L_2(I) \}.$$

Betrachte also $\boxed{\frac{3s}{4} > m}$.

Sei α die größte freie Kapazität eines der Bins 1 bis m; also ist jedes mindestens mit $1-\alpha$ gefüllt.

Kein Objekt in Bins $m+1 \dots s$ kann in dieses Bin passen, d.h. alle sind $x_i > \alpha$.
Andererseits ist keines davon größer als $\frac{1}{3}$.

Daher müssen Bins $(m+1)$ bis $(s-1)$ mindestens drei ~~Bins~~ Objekte der Größe $x_i > \alpha$ enthalten, Bin s mindestens ~~ein~~ ein Objekt $x_i > \alpha$.

Also erhalten wir

$$L_2(I) \geq L_1(I) = \left\lceil \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rceil \geq \lceil (1-\alpha) m + 3\alpha(s-1-m) + \alpha \rceil$$
$$= \lceil (1-4\alpha) m + 3\alpha(s-1) + \alpha \rceil \quad (*).$$

Jetzt betrachte zwei Fälle.

$\boxed{\text{Fall 1}}$ $\alpha > \frac{1}{4}$

Dann ist $(1-4\alpha) < 0$, also können wir

m in $(*)$ durch $\frac{3s}{4} > m$ ersetzen

$$L_2(I) > \left\lceil (1-4\alpha)\frac{3}{4}s + 3\alpha(s-1) + \alpha \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{3}{4}s - 2\alpha \right\rceil$$

$$\geq \frac{3}{4}s - 1 \geq \frac{3}{4}\,OPT(I) - 1 .$$

$\boxed{\text{Fall 2}}$ $\alpha \leq \frac{1}{4}$

Betrachte die freien Kapazitäten β_j der Bins $j \in \{m+1, \ldots, s-1\}$. Da kein Objekt in Bin s die Größe $x_i > \frac{1}{3}$ haben kann, schließen wir $\beta_j \leq \frac{1}{3}$. Falls $\beta_j \leq \frac{1}{4}$ für alle $j \in \{m+1, \ldots, s-1\}$, dann ist $L_2(I) \geq L_1(I) \geq \frac{3}{4}(s-1) \geq \frac{3}{4}\,OPT(I) - 1$.

Ansonsten sei β_{j^*} die erste dieser freien Kapazitäten die größer ist als $\frac{1}{4}$. Dann sind alle Objekte in Bins $\{j^*, \ldots, s-1\}$ $x_i > \beta_{j^*} > \frac{1}{4}$. Da jedes dieser Bins mindestens drei Objekte enthält,

gilt $\beta_j < \frac{1}{4}$ für $j \in \{j^*+1, \dots, s-1\}$.
Bin s enthält mindestens ein Objekt der Größe $x_i > \beta_{j^*} > \frac{1}{4}$. Dann ist $L_2(I) > L_1(I)$
$> \frac{3}{4}(s-2) + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} > \frac{3}{4}\,OPT(I) - 1$.

Also ist asymptotisch das Verhältnis zwischen Schranke und Optimum mindestens $\frac{3}{4}$.

Betrachtet man $3k$ Objekte der Größe $\frac{1}{4}+\delta$, $\delta > 0$, so benötigt man ~~mindestens~~ k Bins;
die Schranke liefert aber $\underbrace{L_2^{(2)} = 0}_{\text{für kleines } \delta}$ und $L_2(I) = L_1(I)$
$\leq \frac{3}{4}k + 1$.

~~Ohne Beweis~~
Allgemein:

Satz 7

Auch für andere Funktionen ergibt sich das Verhältnis $\frac{3}{4}$

Beweis:

Betrachte $3k$ Objekte der Größe $\frac{1}{3} - \varepsilon$
$6k$ Objekte der Größe $\frac{1}{3} + \varepsilon$

Optimum: $4k$

Schranke jeweils $3k$