Definition 2

Dualzulässige Funktion:

$$u : [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto u(x)$$

mit $\sum_{x \in S} x \leq 1 \Rightarrow \sum_{x \in S} u(x) \leq 1$

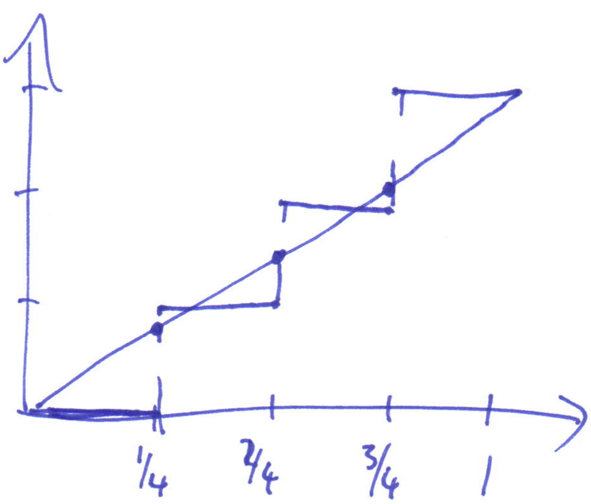
Satz 2:

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$u^{(k)} : [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x(k+1) \in \mathbb{Z} \\ \lfloor (k+1)x \rfloor \frac{1}{k} & \text{sonst} \end{cases}$$

dualzulässig.

Bild:



Beweis:

Sei S endliche Menge nichtnegativer Zahlen

mit $\sum_{x_i \in S} x_i \le 1$.

Wir zeigen $\sum_{x_i \in S} \cancel{f}(u)^{(k)}(x_i) < 1$

Sei $T := \{x_i \in S \mid x_i (k+1) \in \mathbb{Z}\}$;

offenbar ist Behauptung klar für $T = S$.

Ansonsten gilt

$$(k+1) \sum_{x_i \in T} u^{(k)}(x_i) + k \sum_{x_i \in S \setminus T} u^{(k)}(x_i)$$

$$= (k+1) \sum_{x_i \in T} x_i + \sum_{x_i \in S \setminus T} \lfloor (k+1) x_i \rfloor$$

$$< (k+1) \sum_{x_i \in S} x_i .$$

Nach Definition sind $(k+1) \sum_{x \in T} u^{(k)} x$

und $k \sum_{x \in S} u^{(k)} x$

ganzzahlig, also gilt wegen $\sum_{x_i \in S} x_i \le 1$

$(k+1) \sum_{x \in T} u^{(k)}(x) + k \sum_{x \in S \setminus T} u^{(k)} \le k$, also $\sum_{x \in S} u^{(k)}(x) \le 1$.

☐

Satz 3

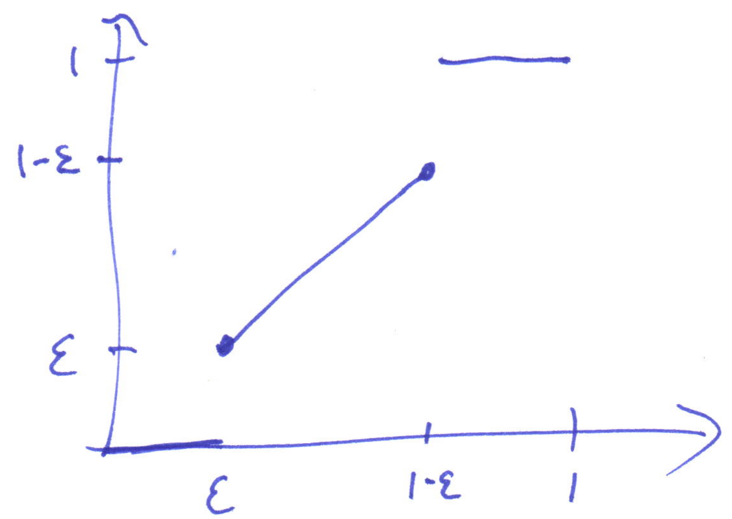
Sei $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2}]$. Dann ist

$$U^{(\varepsilon)} : [0,1] \to [0,1]$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 1-\varepsilon \\ x & \text{für } \varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon \\ 0 & \text{für } x < \varepsilon \end{cases}$$

dualzulässig.

Bild:



Beweis: Sei S endliche Menge nichtnegativer Zahlen mit $\sum_{x_i \in S} x_i \leq 1$.

Betrachte: (1) S enthält Element größer als $1-\varepsilon$, dann sind alle anderen Elemente kleiner als ε, also $\sum_{x \in S} U^{(\varepsilon)}(x) = 1$

(2) wenn alle Elemente kleiner sind als $1-\varepsilon$, dann ist $\sum_{x \in S} U^{(\varepsilon)}(x) \leq \sum_{x \in S} x \leq 1$

Neue Schranken:

- $$L_2(I) := \max_{\varepsilon \in [0,\frac{1}{2}]} \left(U^{(\varepsilon)}(I) \right)$$

$$L_2^{(k)}(I) := \max_{\varepsilon [0,\frac{1}{2}]} L_1\left(U^{(k)} \circ U^{(\varepsilon)}(I) \right)$$

(Beobachtung: Hintereinanderausführung dualzulässiger Funktionen liefert dualzulässige Funktion!)

$$L_*^{(p)}(I) := \max \left\{ L_2(I),\ \max_{k=2,\dots,p} L_2^{(k)}(I) \right\}$$

~~Beobachtung:~~

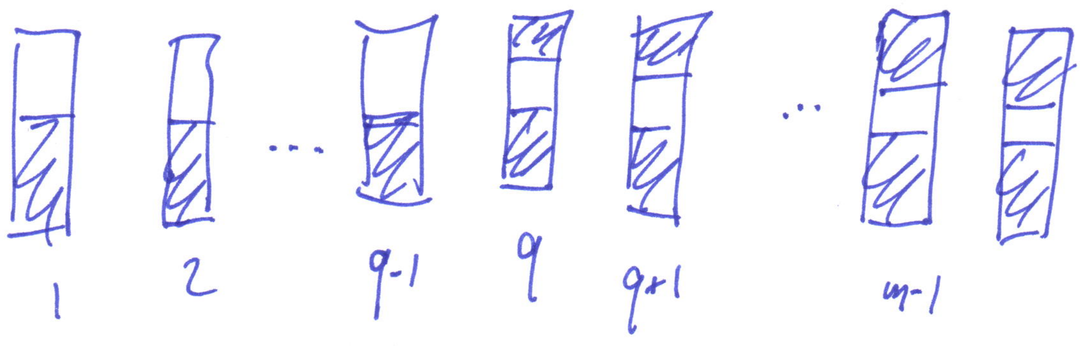
Lemma 3:
Sind die Objekte $x_1, \dots, x_n$ nach Größe sortiert, dann kann (für festes p) $L_*^{(p)}(I)$ in $O(n)$ berechnet werden.

Satz 5

Sei $I := (x_1, \dots, x_n)$ eine BP-Instanz, für die $x_i > \frac{1}{3}$.
Dann liefert $L_*^{(2)}(I)$ den korrekten Optimalwert.

Beweis:

O.B.d.A. $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$.
Betrachte Optimallösung; jedes der m Bins enthält höchstens zwei Objekte.
Sortiere die Bins in der Lösung wie folgt:



(1) Sortiere Bins in absteigender Ordnung nach größerem Objekt.

(2) Schiebe kleinere Objekte so weit wie möglich nach rechts. (Kein Problem mit Kapazität wegen Größe!)

(3) Vertausche ggf. kleinere Objekte, um Sortierung der kleineren Objekte herzustellen.

~~Ed~~

Wegen $x_i > \frac{1}{3}$ bekommen wir

$$u^{(2)}(x_i) = \frac{\lfloor 3x_i \rfloor}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Für $n \geq 2m-1$ erhalten wir

$$L_2^{(2)}(I) \geq L_1\left(u^{(2)}(I)\right) = \left\lceil \sum_{i=1}^{n} u^{(2)}(x_i) \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2(m-1)}{2} \right\rceil = m.$$

(D.h. für fast alle Bins mit zwei Objekten erhalten wir die Optimallösung!)

Betrachte also $\boxed{n < 2m-1}$

Dann ist $q = 2m+1-n > 2m+1-(2m-1) = 2$,
d.h. zumindest Bins 1 und 2 haben nur ein Objekt.

Falls nun $x_m > \frac{1}{2}$, dann ist $x_i > \frac{1}{2}$ für alle $i \leq m$,
also ist $u^{(\frac{1}{2})}(x_i) = 1$, also

$$L_2(I) \geq L_1\left(u^{(\frac{1}{2})}(I)\right) \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{m} u^{(\frac{1}{2})}(x_i) \right\rceil = m.$$

Betrachte also $\boxed{x_m \leq \frac{1}{2}}$