(14.04.08)

1

Kompaktkurs Optimierung

Packungspble

Vorspann

Sándor Fekete
s.fekete@tu-bs.de
Sprechstunde: Mi: 13^{15} – 14^{00}

Kriterium: Quiz am Ende
(Formalität, aber ein bisschen vorbereiten!)

Beispiele:

- Umzugsgüter in Kartons
- Koffer in Kofferraum
- Lieder auf CD
- Zuhörer in Hörsaal
- Veranstaltungen in Zeitplan
- Geschäftsstandorte in Innenstadt
- Chemiefabriken in Industriezonen

Unterscheidung:

- Mehrdimensionales Packen (Koffer!)
- Eindimensionales Packen (Gewicht oder Zeit oder Kosten)
- Abstraktes Packen (Knoten in Graphen)

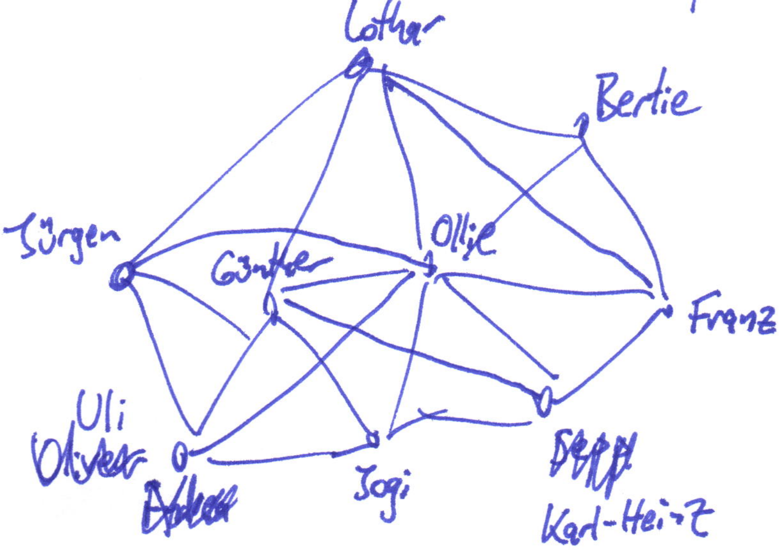
Beispiel für abstrakte Situation:

Gegeben: (i) Menge von Personen, nennen wir sie P

(ii) Konfliktbeziehungen: $\{v,w\}$ sind zerstritten und sollten nicht zur selben Party eingeladen werden

↳ Menge $K = e_1, \dots, e_m$

Gesucht: Eine möglichst große Menge von Personen, die man stressfrei auf dieselbe Party einladen kann.



Formaler:

<u>Problem 1.1</u> (Unabhängige Menge)

Gegeben: Ein Graph $G=(V,E)$

Gesucht: Eine Menge ~~von Knoten~~ $S \subseteq V$ von Knoten, so dass für alle $v,w \in S$ gilt $\{v,w\} \notin E$ UND $|S|$ ist möglichst groß

1.2 ~~Eindimensionale~~ Partition Probleme und Komplexität

Problem 1.2 (Entscheidungsproblem in 1D – Variante A)

Gegeben: n Objekte $g_1, \dots, g_n$,
jeweils mit ~~[illegible]~~ „Größe" $l_1, \dots, l_n$,
ein „Container" mit Größe L.

Frage: Passen die Objekte in den Container?

Beobachtung 1.3 Problem 1.2 ist sehr einfach lösbar!
Man prüft, ob $\sum_{i=1}^{n} l_i \leq L$.

Problem 1.4 (Entscheidungsproblem in 1D – Variante B)

Gegeben: n Objekte $g_1, \dots, g_n$,
jeweils mit „Größe" $l_1, \dots, l_n$,
zwei Container, ~~mit~~ jeweils mit Größe L.

Frage: Passen die Objekte in zwei Container?

Variante A : CD → CD

Variante B : CD → Zwei Cassettenseiten

Beispiel 1.5

Objekte: $\boxed{29}$ $\boxed{13}$ $\boxed{17}$ $\boxed{31}$ $\boxed{35}$

$\boxed{24}$ $\boxed{31}$ $\boxed{7}$ $\boxed{53}$

Container: $\boxed{120}$

$\boxed{120}$

Lösung: $\boxed{29}$ $\boxed{31}$ $\boxed{7}$ $\boxed{53}$

$\boxed{24}$ $\boxed{13}$ $\boxed{17}$ $\boxed{31}$ $\boxed{35}$

Allgemeiner formulierter Spezialfall

Problem 1.6 (Partition)

Gegeben: ~~n Objekte $g_1, \dots, g_n$ mit~~

n Zahlen $\ell_1, \dots, \ell_n \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{n} \ell_i = 2L$

Gesucht: $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} \ell_i = L = \sum_{i \notin I} \ell_i$

Beobachtungen 1.7

(1) Wenn es eine Lösung gibt, ist das leicht zu überprüfen.

(2) Wenn es keine Lösung gibt, kann das u.U. schwer zu überprüfen sein.
(2^{n-1} mögliche Aufteilungen!)

Eigenschaft (1) charakterisiert die Komplexitätsklasse NP

Eigenschaft (2) deutet auf Schwierigkeiten bei der Konstruktion von Lösungen hin.

Satz 1.8 (Karp 1972)

Das Problem PARTITION ist NP-vollständig.

(Also: Es ist unwahrscheinlich, dass es einen Algorithmus gibt, der
(i) immer
(ii) schnell
eine (iii) korrekte Antwort liefert.)

1.3 Andere eindimensionale Probleme

Problem 1.9 (Bin Packing)

Gegeben: n Objekte, mit Größe $l_1, \dots, l_n \in [0,1]$, Vorrat von Containern der Größe 1.

Gesucht: Packung der ~~$\{l_1, \dots, l_n\}$~~ Objekte in möglichst wenige Container, d.h.

Partition von $\{1, \dots, n\} = I_1 \dot\cup I_2 \dots \dot\cup I_K$

mit $\sum_{j \in I_j} l_j \leq 1$

und K möglichst klein

KOROLLAR 1.10

Bin Packing ist NP-vollständig!

Beweis:

~~Betrachte Liste~~

Angenommen, wir hätten einen polynomialen Algorithmus für Bin Packing.

Damit könnten wir für jede beliebige Instanz von Partition entscheiden, ob sie in zwei Container passt – also eine Partition existiert.

Damit hätten wir einen polynomialen Algorithmus für ein NP-vollständiges Problem, also wäre P = NP.

$\square$

Problem 1.11 (Knapsack)

Gegeben: n Objekte mit Größe $l_1, \ldots, l_n$
Wert $c_1, \ldots, c_n$,
Container der Größe L.

Gesucht: Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

mit $\sum_{i \in I} l_i \leq L$

und $\sum_{i \in I} c_i$ möglichst groß.

(Also: Möglichst wertvolle Auswahl, die in den Container passt!)

Korollar 1.12

Knapsack ist NP-vollständig

Beweis:

Reduktion von Partition:

Setze $l_i = c_i$ und teste, ob es eine Lösung des Wertes L gibt.

$\square$